

ПРАКТИКУМ ПО МЕТРОЛОГИИ  
И СТАНДАРТИЗАЦИИ  
ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Ростов-на-Дону  
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# ПРАКТИКУМ ПО МЕТРОЛОГИИ И СТАНДАРТИЗАЦИИ

ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Ростов-на-Дону  
2013

УДК 006.91(076.2)  
К 76

*Рецензенты:*

зам. ген.директора по стандартизации ФБУ «Ростовский ЦСМ» *И.А. Лесина*  
зам. ген.директора по метрологии ФБУ «Ростовский ЦСМ» *В.А. Романов*

**Кошлякова И.Г.**

К 76 Практикум по метрологии и стандартизации: пособие к решению задач / И.Г. Кошлякова, В.А. Ваганов, Т.В. Атоян. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2013. – 227 с.  
ISBN 978-5-7890-0837-9

В пособии рассматриваются наиболее актуальные задачи статистической обработки результатов измерений, сравнения размеров, контроля, определения метрологических характеристик средств измерений по экспериментальным данным и их использования при получении результатов измерений. В пособии приведены прикладные задачи, выполняемые при проведении стандартизации изделий.

Предназначено для студентов технических специальностей, изучающих дисциплины «Метрология, стандартизация и сертификация», «Основы теории измерений», а также инженерно-технических работников в области метрологии и стандартизации.

УДК 006.91(076.2)

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, профессор В.Н. Ананченко

ISBN 978-5-7890-0837-9

© Кошлякова И.Г., Ваганов В.А.,  
Атоян Т.В., 2013

© Издательский центр ДГТУ, 2013

## **ВВЕДЕНИЕ**

В эпоху научно-технического прогресса без повышения качества измерений невозможно динамическое развитие ни в одной области человеческой деятельности. От того, насколько точна, своевременна, объективна измерительная информация, то есть насколько она качественна, зависит правильность принимаемых решений. Без надежной измерительной информации нельзя управлять ни сложными технологическими процессами, ни космическими кораблями, развивать микроэлектронику и повышать автоматизацию производства. Повышение качества и достоверности результатов измерений при учете сырья, продукции сельского хозяйства, материальных и природных ресурсов приводит к существенной экономии при их перевозке, хранении и расходовании. От качества измерительной информации в медицине зависит правильность диагноза и эффективность лечения. В науке повышение точности результатов измерений часто приводит к открытиям. В производстве качество результатов измерений и контроля является одним из основных факторов, определяющих качество процессов и продукции.

В пособии рассмотрены основные вопросы определения характеристик точности средств измерений и теории измерений в целом, относящиеся к процессам сравнения размеров при измерениях, обработке полученных результатов, определению их точности, применению при контроле производственных процессов.

Отдельные главы пособия посвящены вопросам проведения унификации изделий при их проектировании и оценке экономической эффективности этих мероприятий.

Каждая глава содержит общую часть, кратко освещающую теоретические основы темы, примеры решения типовых задач, вопросы для самоконтроля по изложенному материалу и задачи для самостоятельного решения. Разделы с задачами для самостоятельного решения построены в порядке увеличения сложности. Основное внимание уделяется задачам, часто встречающимся в метрологической практике.

Пособие может быть рекомендовано не только для подготовки при изучении дисциплин, связанных с метрологией, но также и для специалистов, применяющих в своей деятельности средства измерений и пользующихся результатами измерений физических величин. В приложениях приведены статистические справочные таблицы, наиболее часто используемые в решении различных измерительных задач.

# **1. СИСТЕМА ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН РАЗМЕРНОСТЬ. РАЗМЕР**

## **1.1. Основные положения**

Системой единиц физических величин называется совокупность основных и производственных единиц физических величин, образованная в соответствии с принципами для заданной системы физических величин.

С 1 января 1980 г. в нашей стране действует международная метрическая система единиц SI (System International). В этой системе установлено 7 основных единиц: длины: метр (м); массы: килограмм (кг); времени: секунда (с); силы электрического тока: Ампер (А); термодинамической температуры: Кельвин (К); силы света: кандела (кд); количества вещества: моль (моль).

В SI приняты две дополнительные единицы для измерения углов:

- плоского угла: радиан (рад);
- телесного угла: стерadian (ср).

Производные единицы системы SI образованы в соответствии с уравнениями, связывающими их с основными единицами или с основными и уже определенными производными. В SI установлено более 130 производных единиц.

Например,  $1 \text{ м/с}$  – единица скорости, образованная из основных единиц SI – метра и секунды;

$1 \text{ Н}$  – единица силы, образованная из основных единиц SI – килограмма, метра и секунды.

В процессе измерения производят сравнение неизвестного измеряемого размера с известным, за который, как правило, принимают единицу измеряемой величины. В результате определяют, сколько единиц измеряемой физической величины содержится в измеряемом размере.

Таким образом, единицей измерения физической величины называется физическая величина фиксированного размера, которой присвоено числовое значение, равное 1, и применяемая для количественного выражения однородных с ней физических величин.

Показателем качественного различия физических величин является их размерность. Размерность обозначается "dim" и записывается заглавными латинскими буквами:

- размерность длины –  $\dim l = L$ ;
- размерность массы –  $\dim m = M$ ;
- размерность времени –  $\dim t = T$ ;
- размерность силы электрического тока –  $\dim I = I$ ;
- размерность термодинамической температуры –  $\dim T = \Theta$ ;
- размерность силы света –  $\dim j = J$ .

Размерность любой производной физической величины  $Q$  можно представить уравнением, содержащим размерности основных физических величин с соответствующими показателями степеней:

$$\dim Q = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \cdot I^{\lambda} \cdot \Theta^{\eta} \cdot J^{\zeta}, \quad (1.1.)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \xi$  – показатели степеней.

Если все показатели степеней равны нулю, то физическая величина называется безразмерной. Безразмерная величина может быть получена как отношение величин, имеющих одинаковые размерности, либо как логарифм отношения этих величин. В последнем случае безразмерная величина называется логарифмической.

Например, относительная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_0 = \varepsilon / \varepsilon_{\text{в}} \quad (1.2.)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м;  
 $\varepsilon_{\text{в}}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума, Ф/м.

Анализ размерности результата при выводе формул или расчетах позволяет проверить их правильность, а также зависимость между величинами.

Если сравнить записи размеров: 1 км, 1000 м, 100000 см, 1000000 мм, то очевидно, что это различные формы представле-

ния одного размера. Числовые значения различны из-за различия выбранных единиц измерений.

В SI установлены кратные (большие единиц системы) и дольные (меньшие единиц системы) единицы, отличающиеся от основных в число раз, кратное 10. Для их обозначения используются специальные приставки.

Таблица 1.1

Кратные и дольные единицы

Кратные единицы			Дольные единицы		
Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение
$10^{18}$	Экса	Э	$10^{-1}$	Деци	д
$10^{15}$	Пета	П	$10^{-2}$	Санتي	с
$10^{12}$	Тера	Т	$10^{-3}$	Милли	м
$10^9$	Гига	Г	$10^{-6}$	Микро	мк
$10^6$	Мега	М	$10^{-9}$	Нано	н
$10^3$	Кило	к	$10^{-12}$	Пико	п
$10^2$	Гекто	г	$10^{-15}$	Фемто	ф
$10^1$	Дека	да	$10^{-18}$	Атто	а

Можно выразить единицу производной физической величины через единицы основных физических величин с помощью уравнения:

$$[Q] = k [L]^{\alpha} \cdot [M]^{\beta} \cdot [T]^{\gamma} \cdot [I]^{\lambda} \cdot [\theta]^{\eta} \cdot [J]^{\zeta}, \quad (1.3.)$$

где  $[L], [M], \dots$  – единицы основных физических величин;  
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  – показатели степеней;  
 $k$  – коэффициент пропорциональности.

Если  $k = 1$ , то такая производная единица называется когерентной. Например,  $1\text{м}/\text{с}^2$  – когерентная единица ускорения.

## 1.2. Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой система единиц физических величин?
2. Когда введена в действие SI, и какие основные единицы в нее входят?
3. Что такое производная единица? Приведите примеры таких единиц?
4. В чем заключается измерение величины?

5. Что называется единицей измерений физической величины?
6. Для чего введено понятие «размерность»?
7. Как выразить размерность производной физической величины?
8. Какие величины называются безразмерными?
9. Какие кратные и дольные единицы установлены в SI?
10. Что такое когерентная единица?

### 1.3. Примеры решения задач

**Задача 1.3.1.** Выразите размерность электрической емкости через размерности основных физических величин SI. Определите единицу измерения электрической емкости через единицы основных физических величин. Установлена ли специальная единица электрической емкости?

Решение.

Электрическая емкость  $C$  численно равна заряду  $q$ , изменяющему потенциал проводника  $U$  на 1 единицу:

$$C = q/U \quad (1.4.)$$

В системе SI за единицу заряда  $q$  принимается Кулон. Кулоном называется электрический заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1с при силе тока  $I$  в 1А, т.е.

$$q = I \cdot t \quad (1.5.)$$

Электрическое напряжение  $U$  представляет собой работу  $A$ , совершаемую суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении на участке цепи единичного положительного заряда  $q$ :

$$U = A/q \quad (1.6.)$$

Работу  $A$  можно выразить через электрическую силу  $F$  и путь  $l$ :

$$A = F \cdot l \quad (1.7.)$$

Сила  $F$  определяется по закону Ньютона:

$$F = m \cdot a \quad (1.8.)$$

где  $m$  – масса;  
 $a$  – ускорение.

В свою очередь ускорение  $a$ :

$$a = u/t = l/t^2 \quad (1.9.)$$

где  $u$  – скорость;

$l$  – длина;

$t$  – время.

Тогда можно записать:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{I \cdot t \cdot q}{A} = \frac{I \cdot t \cdot I \cdot t}{F \cdot l} = \frac{I^2 \cdot t^2}{m \cdot a \cdot l} = \frac{I^2 \cdot t^2 \cdot t^2}{m \cdot l \cdot l} = \frac{I^2 \cdot t^4}{m \cdot l^2} \quad (1.10)$$

Размерность электрической емкости:

$$\dim C = \dim^{-2} / \dim^{-1} m \cdot \dim^4 t \cdot \dim^2 I = L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2 \quad (1.11.)$$

В системе СИ единица электрической емкости может быть выражена:

$$[C] = \frac{C^4 \cdot A^2}{M^2 \cdot K^2} = \Phi \quad (1.12)$$

Специальная единица электрической емкости называется Фарадой.

**Задача 1.3.2.** Переведите с помощью коэффициентов в единицы СИ следующие величины: 1 МПа, 1 кОм, 1 мкм, 1 пФ.

Решение.

В соответствии с коэффициентами и условными обозначениями приставок кратных и дольных единиц таблицы 1.1 можно записать:

$$1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad 1 \text{ кОм} = 1 \cdot 10^3 \text{ Ом}; \quad 1 \text{ мкм} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad 1 \text{ пФ} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}.$$

**Задача 1.3.3.** Переведите единицы давления в единицы давления СИ. Какие из них являются когерентными?

Решение.

В системе СИ давление измеряется в Паскалях:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Для единиц давления установлена следующая связь с единицей СИ:

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па};$$

$$1 \text{ мм.рт.ст} = 133,322 \text{ Па};$$

$$1 \text{ мм вод.ст} = 9,80665 \text{ Па};$$

$$1 \text{ ат} = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Па};$$

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм.рт.ст} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Так как  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \cdot 9,8 \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}}$ , т.е. коэффициент

пропорциональности  $k = 9,8$  – отличен от 1, то ни одна из единиц давления не является когерентной.

**Задача 1.3.4.** Найдите ошибки в следующих записях размеров:

- а)  $2,6 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ ; б)  $75 \pm 5 \text{ мм}$ ; в) от  $-10^0 \text{ С}$  до  $+20^0 \text{ С}$ ;  
 г)  $10 \text{ кг}/\text{с}^2 \cdot \text{м}$ ; д)  $5 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^3/\text{К}$ ;  
 е)  $220\text{В}$ ; ж)  $110 \text{ В}$ ,  $127 \text{ В}$  и  $220 \text{ В}$ ; з)  $3 \text{ м А}$ ; и)  $0,8 \text{ ммин}$ ;  
 к) ускорение  $40 \text{ метров в секунду в квадрате}$ .

Решение.

а)  $2,6 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}$  – правильно:  $2,6 \frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{м}}$  или  $2,6 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-1}$ ,

или  $2,6 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$  – при наличии записи в знаменателе должна быть одна горизонтальная или косая черта. Величины, входящие в знаменатель, должны быть заключены в скобки (в случае косой черты) или все иметь показатели степеней (при записи без черты знаменателя);

б)  $75 \pm 5 \text{ мм}$  – правильно:  $(75 \pm 5) \text{ мм}$  или  $75 \text{ мм} \pm 5 \text{ мм}$  – так как единица измерения относится к обоим числам, то они должны быть объединены скобками; возможно указание единицы измерения после каждого числа;

в) от  $-10^0 \text{ С}$  до  $+20^0 \text{ С}$  – правильно от  $-10$  до  $+20 \text{ }^\circ\text{С}$  – при указании интервала или при перечислении размеров единица измерения записывается один раз в конце. Единицей измерения в записи является градус Цельсия ( $^\circ\text{С}$ ) – записывается без пробелов (пробел после числа);

г)  $10 \text{ кг}/\text{с}^2 \cdot \text{м}$  – правильно:  $10 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$  или  $10 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-1}$  или  $\frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{м}}$  (в соответствии с примером 1.3.4, а);

д)  $5 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^3/\text{К}$  – правильно:  $5 \text{ м} \cdot \text{кг}/(\text{с}^3 \cdot \text{К})$  или  $5 \text{ м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$  или  $5 \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$  (в соответствии с примером 1.3.3, а, г);

е)  $220\text{В}$  – правильно:  $220 \text{ В}$  – перед указанием единицы измерений после числа необходим пробел;

ж) 110 В, 127 В и 220 В – правильно 110, 127 и 220 В (в соответствии с примером 1.3.4,в);

з) 3 м А – правильно 3 мА – приставки, обозначающие кратность или дольность, пишутся слитно с обозначением единиц измерений;

и) 0,8 ммин – правильно: 0,048<sup>м</sup> – приставка, обозначающая дольность или кратность, добавляется только к основной единице величины или специальной единице, являющейся наименьшей;

к) ускорение 40 метров в секунду в квадрате – правильно: ускорение 40 метров на секунду в квадрате – предлог «в» используется только для единиц, характеризующих скорость протекания процесса.

#### 1.4. Задачи

**Задача 1.4.1.** Выразите размерности приведенных ниже физических величин через размерности основных физических величин системы SI. Определите единицы измерений этих величин и их связь с единицами измерений основных физических величин системы SI.

Физические величины: сила тока, скорость, ускорение, плотность вещества, теплоемкость, напряжение, электрическое сопротивление, электрическая проводимость, электрическая емкость, индуктивность, сила, давление, работа, мощность, энергия.

**Задача 1.4.2.** Переведите с помощью коэффициентов в единицы SI следующие величины: 1 кН, 1 Мт, 1 нФ, 1 мА, 1 сН, 1 мкГн, 1 ТГц, 1 гПа, 1 даВт.

**Задача 1.4.3.** В каком соотношении должны были бы находиться миллиметр и микрокилометр, если бы приставки давались километру?

**Задача 1.4.4.** Как следовало бы называть такие единицы как литр и тонна по логике названий метрической системы мер?

**Задача 1.4.5.** Русский изобретатель Б.С.Якоби (1801-1874 г.г.) предложил общую для всех единицу сопротивления проводников электрическому току и определил ее как сопротивление медной проволоки длиной 6,358 фута (1 фут = 30,48 см) и диаметром 0,00336 дюйма (1 дюйм = 2,54 см). Выразите единицу сопротивления Якоби в системе SI, если удельное сопротивление меди  $\rho_{Cu} = 0,0175 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ .

**Задача 1.4.6.** Каким должно быть показание спидометра, градуированного в км/ч при скорости автомобиля 30,2 м/с?

**Задача 1.4.7.** При испытании автомобиля установлена мощность его двигателя в рабочем режиме, равная 58,84 кВт. Выразите мощность двигателя в лошадиных силах, учитывая, что 1 л.с = 735,499 Вт.

**Задача 1.4.8.** Угловая скорость вала редуктора станка 60 рад/с. Найдите частоту вращения вала в оборотах в минуту.

**Задача 1.4.9.** Массовый расход нефти, измеренный поплавковым расходомером, составил 12 кг/с. Выразите массовый расход нефти в тоннах в часах.

**Задача 1.4.10.** На предприятии израсходовано 8,55 ГДж электрической энергии. Выразите расход электрической энергии в киловатт-часах.

**Задача 1.4.11.** Определите необходимую массу песка для засыпки дорожек, общая длина которых 0,5 км, ширина 2 м. При этом слой песка должен иметь толщину 2,5 см. Плотность песка  $1,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**Задача 1.4.12.** Манометр парового котла показывает давление 8 технических атмосфер. С какой силой давит пар внутри котла на поверхность стенки в 1 м<sup>2</sup>?

**Задача 1.4.13.** Определите работу, совершаемую газами в цилиндре двигателя за один ход поршня, равный 18 см, если площадь поршня

$12 \cdot 10^3$  мм<sup>2</sup>, а среднее давление газов на поршень 5 ат.

**Задача 1.4.14.** Какую работу совершает двигатель мощностью 2,5 л.с. за 10 мин?

**Задача 1.4.15.** Транспортер должен поднимать в час 50 м<sup>3</sup> песка на высоту 500 см. Определите необходимую для этого мощность двигателя в кВт.

**Задача 1.4.16.** Двигатель токарного станка при скорости резания 780 м/мин развивает мощность 6 л.с. Определите силу сопротивления материала заготовки.

**Задача 1.4.17.** Диаметр шкива электродвигателя, делающего 1200 оборотов в минуту, равен 20 см. На сколько миллиметров нужно изменить диаметр шкива, чтобы при увеличении угловой скорости электродвигателя до 84 рад/с скорость движения приводного ремня осталась прежней?

**Задача 1.4.18.** Окружность одного из двух шкивов, связанных ременной передачей, равная 800 мм, а другого 180 см. Определите угловую скорость в единицах СИ второго шкива, если первый делает 70 оборотов в минуту.

**Задача 1.4.19.** Определите, сколько метров проволоки, сопротивление 1 дм которой равно 3 кОм, нужно взять, чтобы при включении её в цепь с напряжением 220 В величина тока в цепи не превышала 95 мкА.

**Задача 1.4.20.** Для покрытия цинком партии болтов и гаек их погрузили в раствор цинковой соли. Процесс гальванизации длился 20 мин при напряжении 3 В. При этом работа тока была равна 540 кДж. Какой величины ток потребляла гальваническая ванна? Сколько цинка выделилось на деталях, если при токе 1 А выделяется в 1 секунду 0,339 мг цинка?

**Задача 1.4.21.** Мощность электродвигателя заточного станка 1,5 л.с., напряжение тока 220 В. Определите величину тока.

**Задача 1.4.22.** Электрический нагреватель должен потреблять мощность не более 0,90 кВт при напряжении 220 В. Обмотка нагревателя делается из никелиевой проволоки ( $\rho_{Ni} = 0,45 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$ ) сечением 0,5 мм<sup>2</sup>. Рассчитайте длину обмотки в метрах.

**Задача 1.4.23.** Средняя величина тока, потребляемая электрической сетью города для освещения квартир, 3000 А. Определите израсходованную за сутки энергию ( в кВт·ч, Н·м, ккал) и среднюю суточную мощность (в кВт и л.с.), если напряжение, подаваемое в квартиры – 220 В.

**Задача 1.4.24.** Кипятильник нагревает 1,7 л воды от 25 °С до кипения за 5 минут. Определите величину тока в кипятильнике при напряжении в цепи

220 В. Потерями теплоты можно пренебречь.

**Задача 1.4.25.** Электросварочный аппарат в момент сварки даёт ток 7,5 кА при напряжении 3 В. Свариваемые стальные листы имеют сопротивление 0,5 мОм. Какое количество теплоты, выраженное в джоулях, выделится при сварке за 4 минуты?

**Задача 1.4.26.** Предел прочности клеевого шва для стали, склеенной клеем БФ, при растяжении равен 70 Н/мм<sup>2</sup>. Какой наибольший груз можно повесить к склеенному стальному вертикальному стержню, если диаметр стержня 2 см?

**Задача 1.4.28.** Допустимо ли насадить точильный круг на вал двигателя, делающего 2850 об/мин, если на круге имеется штамп завода изготовителя: 35 м/с;  $\varnothing 250$  мм?

**Задача 1.4.29.** Академик Б.С. Якоби в 1834 г. изобрёл электродвигатель. В первом варианте электродвигатель равномерно поднимал груз 5,0 кг на высоту 60 см за 2 секунды. Определите мощность двигателя в единице SI.

**Задача 1.4.30.** Какова производительность (в л/ч) установки водоснабжения на животноводческой ферме, если при напоре воды 10 м мощность насоса составляет 0,7 кВт?

**Задача 1.4.31.** Нефть из скважины поднимается по трубе диаметром 60 мм. С какой скоростью движется нефть (м/с), если в 1 ч через трубу проходит 9,12 т нефти?

**Задача 1.4.32.** Определите высоту подъёма грунтовой воды в напорном источнике относительно поверхности земли, если вода залегает на глубине 30 м и находится под давлением 5 ат. Атмосферное давление учесть, а сопротивлением при движении воды по трубопроводу пренебречь.

**Задача 1.4.33.** Фреза станка вращается с угловой скоростью 3768 рад/мин. Число зубьев на фрезе 40. С какой частотой вибрирует станок?

**Задача 1.4.34.** Стальную деталь (рис. 1.1) проверяют ультразвуковым дефектоскопом, работающим на частоте 1 МГц. Первый отражённый сигнал был получен через 8 мкс после послышки, а второй – через 20 мкс. На какой глубине обнаружен дефект? Какова высота детали? Скорость ультразвука в стали 500 м/с.

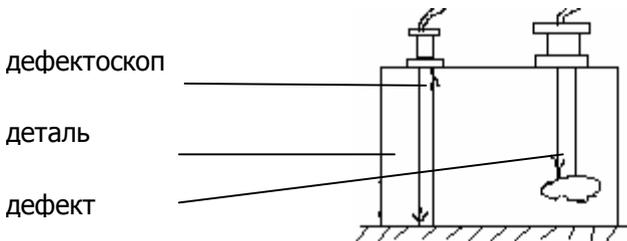


Рис. 1.1. Схема измерений ультразвуковым дефектоскопом

**Задача 1.4.35.** Ультразвук применяется для измерения скорости потоков жидкости и газа. Какова скорость  $v$  потока, если расстояние между двумя вибраторами 0,1 км ультразвук проходит в одном направлении за 0,5 с, в противоположном – за 1 с? Зависит ли результат измерений от температуры и рода жидкости?

**Задача 1.4.36.** Определите к.п.д. тракторного двигателя, если расход дизельного топлива составляет 216 г на 1 л.с. в 1 час?

**Задача 1.4.37.** Мощность двигателя автомобиля 80 кВт. Определить расход бензина в 1 час, если к.п.д. двигателя 0,25.

**Задача 1.4.38.** В компрессоре при движении поршня вниз в цилиндр засасывается 500 мл воздуха при температуре  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$  и давлении 0,981 бар. При движении поршня вверх воздух нагнетается в ресивер (специальный баллон). Сколько качаний сделано, если температура воздуха в ресивере  $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а давление 5 ат? Ёмкость ресивера 22 л.

**Задача 1.4.39.** Определите, в каком агрегатном состоянии находится вода при  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  и давлении 14,5 атм? При 643 К и давлении 250 ат? При  $320\text{ }^{\circ}\text{R}$  и давлении 220,7 бар? При  $626\text{ }^{\circ}\text{F}$  и давлении  $245 \cdot 10^5$  Па?

**Задача 1.4.40.** На сколько градусов нужно было бы нагреть медную проволоку сечением  $1\text{ мм}^2$ , чтобы она приняла ту же длину, что и под действием растягивающей нагрузки в 5 кг?

**Задача 1.4.50.** Давление воздуха в отбойном молотке 4 ат, площадь поршня  $15\text{ см}^2$ , ход поршня 30 мм. Определите мощность молотка (Вт), если он делает 1200 ударов в минуту.

**Задача 1.4.51.** Чему равен ход поршня паровой машины, если среднее давление пара 9,8 бар, площадь поршня  $200\text{ см}^2$  и мощность машины при 180 об/мин равна 80 л.с?

**Задача 1.4.52.** В цепь переменного тока включён конденсатор ёмкостью 1 мкФ и дроссель индуктивностью 0,1 Гн. Найдите отношение индуктивного сопротивления к ёмкостному при частотах 50 Гц и 2 кГц. При какой частоте эти сопротивления станут равными?

**Задача 1.4.53.** Ёмкость конденсатора 0,05 мкФ. Какой должна быть индуктивность катушки, чтобы реактивные сопротивления катушки и конденсатора при частоте тока 1 кГц были одинаковыми?

**Задача 1.4.54.** Цепь состоит из последовательно соединённых катушки индуктивностью 16 мГн и конденсатора ёмкостью 2,5 мкФ. Какой должна быть частота тока в цепи, чтобы возникло явление резонанса?

**Задача 1.4.55.** Цепь состоит из конденсатора ёмкостью 600 пФ. Какую нужно подобрать индуктивность катушки, чтобы резонанс напряжений наступил при частоте тока 1 МГц?

**Задача 1.4.56.** Найдите реактивное и полное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединённых конденсатора  $C=50$  мкФ, катушки индуктивности  $L=20$  мГн и активного сопротивления  $R=30$  Ом, при частоте переменного тока  $\omega=1$  кГц.

**Задача 1.4.57.** Для работы животноводческой фермы, находящейся на расстоянии 200 м от электростанции, необходима энергия: для освещения – 2,1 кВт, для силовых процессов – 10 л.с и тепловых процессов – 3612 ккал/ч. Рассчитайте сечение алюминиевых проводов передачи энергии, если напряжение в начале линии 230 В, а падение напряжения в линии составляет 8,7 %.

**Задача 1.4.58.** На искусственных спутниках Земли устанавливают солнечные полупроводниковые электробатареи. Определите среднюю величину электрической энергии, получаемой с 1 м<sup>2</sup> такой батареи в течение 1 оборота спутника вокруг Земли. Плотность потока солнечной энергии 1 кВт/м<sup>2</sup> тепловое излучение составляет 60% потока, к.п.д. батареи 10%, период обращения спутника 102 мин. Спутник освещается лучами солнца 2/3 времени оборота вокруг Земли.

**Задача 1.4.59.** Как выражаются через основные единицы системы СИ следующие производные единицы, имеющие специальные наименования: Гц, Н, Па, Дж, Вт, Кл, В, Ф, Ом, См, Вб, Тл, Гн, лм, лк, Бк, Гр, Зв?

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПО РАЗЛИЧНЫМ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМ ШКАЛАМ

### 2.1. Основные положения

При определении количественной характеристики измеряемой величины измеряемый размер сравнивают с известным размером. Это сравнение может быть выполнено по различным измерительным шкалам. Установлены измерительные шкалы порядка, интервалов и отношений.

**Шкала порядка** (шкала рангов) представляет упорядоченный (ранжированный) ряд размеров, в котором каждый последующий размер больше предыдущего. При этом сами размеры неизвестны. По этим шкалам можно оценивать только эквивалентность. Т.е. результат измерений может иметь вид: измеряемый размер  $Q_i$  больше, меньше или равен размеру  $Q_j$  по шкале порядка:

$$Q_i > Q_j \text{ или } Q_i < Q_j \text{ или } Q_i = Q_j \text{ или } Q_i \approx Q_j \quad (2.1)$$

При сравнении размеров более одного раза результат измерений можно выразить в виде:

$$Q_j \leq Q_i \leq Q_{j+1} \text{ или } Q_j < Q_i < Q_{j+1}, \quad (2.2)$$

то есть можно определить, между какими соседними размерами  $Q_j$  и  $Q_{j+1}$  по шкале порядка находится измеряемый размер  $Q_i$ .

Условная шкала порядка имеет характерные (реперные) точки, которым присвоены числовые значения в условных единицах или баллах.

На шкале наименований характерным точкам шкалы присвоены названия.

Ни одна из шкал порядка не даёт информацию о значении измеряемой величины, поэтому на этих шкалах не определены никакие математические действия. Возможны только логические операции с использованием свойств транзитивности.

**Шкала интервалов** (шкала разностей) представляет собой упорядоченную последовательность размеров, между которыми установлены строго определённые интервалы. Сами размеры неизвестны. При измерении размера  $Q_i$  можно определить: на сколько размер  $Q_i$  отличается от размера  $Q_j$  по шкале интервалов:

$$Q_i - Q_j = \Delta Q \quad (2.3)$$

Нуль на шкале условный, поэтому возможны отрицательные значения размеров.

На шкалах интервалов возможны сложение и вычитание, т.е. применяются свойства аддитивности, а также транзитивности.

**Шкалы отношений**, так же как и шкалы интервалов, разбиты на строго определённые одинаковые интервалы. Нуль на шкале отношений является абсолютным, то есть меньше нуля значений не может быть и, следовательно, невозможны отрицательные значения размеров.

Благодаря возможности определять по шкале отношений абсолютные величины размеров, на шкале отношений возможны все логические и математические действия. Можно установить: во сколько раз измеряемый размер  $Q_i$  отличается от известного размера  $Q_j$  по шкале отношений:

$$Q_i / Q_j = q \quad (2.4)$$

Обычно за известный размер принимают единицу измерений величины:  $Q_j = [Q]$  и определяют, во сколько раз измеряемый размер  $Q_i$  отличается от соответствующей единицы измерений:

$$q = Q_i / [Q] \quad (2.5)$$

## 2.2. Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой шкала: а) порядка; б) условная порядка (реперная); в) наименований; г) интервалов; д) отношений?

2. Приведите форму выражения результата измерений по шкале: а) порядка; б) интервалов; в) отношений.

3. Какие логические или математические действия возможны на шкале: а) порядка; б) интервалов; в) отношений?

4. В чем состоит отличие шкалы отношений от шкалы интервалов?

5. Почему на шкале интервалов могут быть отрицательные значения размеров?

6. По какой измерительной шкале можно определить абсолютное значение размера?

7. Можно ли вносить мультипликативные поправки в размеры, полученные по шкале интервалов?

### 2.3 Примеры решения задач

**Задача 2.3.1.** Определите, по каким измерительным шкалам установлены величины следующих показателей:

а) размеры одежды:

по журналу «Бурда моден»	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
по объёму груди, см	80	84	88	92	96	100	104	108	116	122

Решение.

Шкала размеров одежды по журналу «Бурда моден» представляет собой ранжированный ряд размеров. Размеры приведены в условных единицах. Следовательно, данная шкала является условной шкалой порядка. Интервалы между размерами различны, например, между размерами 42 и 44 – интервал 4 см, а между размерами 48 и 50 – 6 см, что делает невозможным отнести эту шкалу к шкале интервалов.

Шкала размеров, выраженных через объём груди, см, является шкалой отношений, так как имеет чётко определённый интервал, соответствующий 1 см, и абсолютный нулевой размер.

б) температура среды, выраженная в градусах Цельсия и в градусах Кельвина.

Решение.

На международной температурной шкале Цельсия за  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  принята температура таяния льда, за  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  – температура кипения воды. Этот, интервал разбит на 100 интервалов, каждый из которых соответствует  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Возможны отрицательные значения температуры, так как в природе может быть температура, меньшая температура таяния льда. Следовательно, шкала Цельсия является шкалой интервалов.

$1\text{ K}$  равен  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ , так как соответствует 0,01 температурного интервала между точками таяния льда и кипения воды. За  $0\text{ K}$  принята температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. В природе ниже температуры не может быть:  $0\text{ K} = -273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Эта температура является абсолютным нулём. На шкале Кельвина нет отрицательных значений. Следовательно, шкала Кельвина является шкалой отношений.

## 2.4. Задачи

**Задача 2.4.1.** Определите, по каким измерительным шкалам установлены величины следующих показателей:

а) фотовыдержка

Сумма условных чисел	23	24	26	28	29	30	31	32	33	34	35	37	39	42	44	...
Доли секунды	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	...

б) чувствительность фотоплёнки:

единицы ГОСТ ASA:

16;20;25;32;40;50;65;80;100;130;160;200;250;320;500

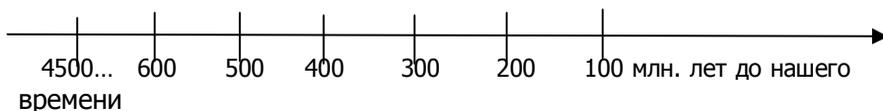
градусы DIN:13;14;15;16;17;18;19;21;22;23;24;25;26;28

условные единицы: 100; 200; 400; 800; 1600

в) календари;

г) археологические этапы развития Земли:

Возникновение Земли	Докембрийская эра	Палеозойская эра «древней жизни»					Мезозойская эра «средней жизни»			Кайнозойская эра «современной жизни»	
		Кембрийский период	Ордовикский период	Силурийский период	Девонский период	Каменноугольный период	Пермский период	Триасовый период	Юрский период	Меловой период	Третичный период



д) кислотность почв:

Наименование	Кислотность, pH
сильнокислые	3 – 4
кислые	4 – 5
слабокислые	5 – 6
нейтральные	6 – 7
щелочные	7 – 8
сильнощелочные	8 – 9

е) баллы в спорте, например, при выездке лошадей:

- 10 – отлично;
- 9 – очень хорошо;
- 8 – хорошо;
- 7 – довольно хорошо;
- 6 – вполне удовлетворительно;
- 5 – удовлетворительно;
- 4 – неудовлетворительно;
- 3 – довольно плохо;
- 2 – плохо;
- 1 – очень плохо;
- 0 – не выполнено;

ж) пробы драгоценных металлов:  
золото: 375; 500; 583; 750; 958;  
серебро: 800; 875; 916; 960.

Пробы определяются как число частей металла в 1000 частях (массовая доля) лигатурного сплава;

з) звуковая октава (формула музыкального строя, выведенная Пифагором):

Доли звучащей струны	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	1/13	1/15	1/16
Число колебаний каждой доли при частоте струны 24 Гц	192	216	240	256	288	320	360	384
Ноты	до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до

**Задача 2.4.2.** В первом ртутном термометре, созданном в 1715 г. Фаренгейтом, в качестве реперных точек были выбраны температура таяния смеси льда с солью и нашатырем ( $-32\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) и температура тела человека. Позднее Реомюр предложил шкалу, в которой градус представлял  $1/80$  часть температурного интервала между точкой таяния льда ( $0\text{ }^{\circ}\text{R}$ ) и точкой кипения воды ( $80\text{ }^{\circ}\text{R}$ ) при атмосферном давлении. Эта же точка на шкале Фаренгейта соответствовала  $212\text{ }^{\circ}\text{F}$ . Зная температуру в градусах Цельсия, переведите значение в температуру по шкалам Фаренгейта и Реомюра. Определите вид каждой из шкал.

**Задача 2.4.3.** Какие температурные точки совпадают на шкалах:

- Цельсия и Фаренгейта;
- Реомюра и Фаренгейта.

**Задача 2.4.4.** По каким шкалам измерялась длина удава в мультфильме «38 попугаев», если она была равна: двум половинкам удава, двум слоненкам, пяти мартышкам, 38 попугаям и 1 попугайскому крылышку? В чем отличие этих шкал?

**Задача 2.4.5.** Подгоняет или тормозит южное течение движение корабля, идущего курсом «норд»? По какой шкале определяется курс в морской навигации?

**Задача 2.4.6.** Выразите по шкале отношений шкалу порядка следования цветов в спектре белого цвета.

**Задача 2.4.7.** Определите погрешность измерения времени в годах при использовании григорианского календаря. Какие меры принимаются для уменьшения этой погрешности?

**Задача 2.4.8.** Как определить стороны света ночью, пользуясь часами и ориентируясь на Луну?

**Задача 2.4.9.** Как приближенно можно по пению лесных птиц определить время в летние ночные и утренние часы?

**Задача 2.4.10.** Определите, какому году в нашем летоисчислении соответствует дата 19 декабря 7208 г., упомянутая в летописи.

**Задача 2.4.11.** Какую физическую величину, и по какой шкале характеризуют надписи на метрономе: престо, виваце, аллегро, модерато?

**Задача 2.4.12.** Приведите примеры использования различных видов измерительных шкал в бытовых приборах: кухонной печи, утюге, холодильнике, телевизоре, музыкальном центре, медицинском термометре.

**Задача 2.4.13.** К каким измерительным шкалам можно отнести последовательности:

а) знаков небесных тел: Солнца, Луны, Марса, Меркурия, Юпитера, Венеры, Сатурна;

б) знаков зодиака: Водолея, Рыб, Овна, Тельца, Близнецов, Рака, Льва, Девы, Весов, Скорпиона, Стрельца, Козерога?

**Задача 2.4.14.** Мановакуумметр градуирован в килопаскалях, как показано на рисунке. Оцифруйте шкалу прибора в других единицах измерения давления: атм., кгс/см<sup>2</sup>, мм рт. ст., бар. По какой измерительной шкале определяется давление мановакуумметром (рис. 2.1)?

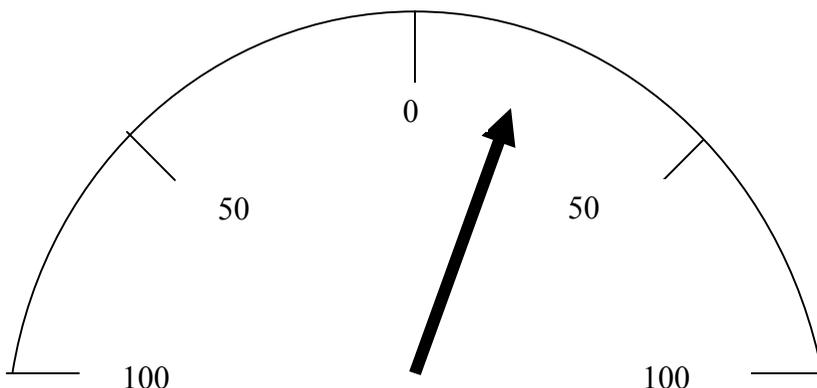


Рис. 2.1. Шкала мановакуумметра

**Задача 2.4.15.** Песочные часы с узким горлышком, через которые сыплется мелкий песок из верхней части в нижнюю, называются склянкой. Склянке на корабле соответствует получасовой промежуток времени. Счет начинается с полудня: в 12.00 бьют 3 удара в судовой колокол, в 12.30 – 1 удар, в 13.00 -2, в 13.30 – 3, в 14.00 – 4, ..., в 15.00 – 6, в 16.00 – 8; в 16.30 – 1 раз и следует новый отчет времени на 4 часа и т. д.

Определите вид измерительной шкалы. Сколько склянок должны пробить в 8.30 час., в 10.00 час., в 24.00 час., в 3.30 час.?

**Задача 2.4.16.** Оценить расстояние до недоступных предметов можно, используя зрение и слух. При нормальном зрении человек различает в дневное время: трубы на крышах на расстоянии в 3 км, отдельные деревья – 2 км, людей ( в виде отдельных точек) – 1,5-2 км, переплеты оконных рам – 500 м, листья на деревьях – 200 м, кисти рук – 100 м, глаза (в виде точек) – 60-70 м; в ночное время: костер виден на расстоянии 6-8 км, свет карманного фонарика – 2 км, горящая спичка – 1-1,5 км, огонь сигареты – 500 м.

При нормальной влажности воздуха в тишине средняя дальность начала слышимости: шума электрички – 5-10 км, гудка автомобиля – 2-3 км, лая собаки – 1-2 км, движения автомашины по шоссе – 1-2 км, по грунтовой дороге – 0,5-1 км, стук топора – 300-500 м, разговор людей (неразборчиво) – 200 м, кашель – 50-100 м.

Определите виды этих шкал.

**Задача 2.4.17.** Как можно оценить твердость минерала, если:

- а) минерал процарапывается углем;
- б) минерал процарапывается корундом, но не повреждается топазом?

**Задача 2.4.18.** При дегустации пищевых продуктов каждый эксперт оценивал качество по 10 балльной системе. По какой шкале проводились измерения?

**Задача 2.4.19.** При оценке конкурса музыкантов преимущество  $i$ -го над  $j$ -м обозначалось 1,  $j$ -го над  $i$ -м - -1; равноценное выступление - 0. По какой шкале проводилась оценка и как подвести итоги конкурса? Оценка выступлений приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Оценка творческого конкурса

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
2	-1	0	1	1	-1	1	1	0	1	0
3	1	1	0	-1	-1	-1	0	1	1	-1
4	1	-1	1	0	1	1	1	-1	0	0
5	-1	1	1	-1	0	0	1	1	1	1
6	1	-1	1	-1	0	0	1	1	1	0
7	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	1	1	1
8	1	0	-1	1	-1	-1	-1	0	0	0
9	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	0	1
10	-1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0

**Задача 2.4.20.** При измерении разности температуры в климатической камере и температуры тройной точки воды тремя термометрами с различными классами точности их показания совпали. Графически изобразите этот случай.

**Задача 2.4.21.** При определении времени наработки до первого отказа изделия пользовались таймером. По какой измерительной шкале получали результаты испытаний?

**Задача 2.4.22.** При испытаниях двух типов полиэтиленовых мешков на прочность мешки наполняли и бросали до их разрыва. Затем подсчитывали число падений (таблица 2.2). Может ли такой показатель определять прочность? Какая измерительная шкала при этом используется? Вычислите статистические характеристики, необходимые для оценки прочности.

Таблица 2.2

Результаты испытаний мешков – число падений до разрыва

№ мешка Тип мешка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	A	50	64	48	70	66	60	59	54	62	68	67	71	56	55
B	70	68	74	50	76	68	72	65	54	66	–	–	–	–	–

**Задача 2.4.23.** Одним из показателей принадлежности произведения конкретному автору является распределение фраз по длине. По какой измерительной шкале определяется этот показатель? Рассчитайте по данным таблицы 2.3 числовые характеристики – асимметрию и эксцесс для проверки соответствия распределения фраз нормальному теоретическому закону.

Таблица 2.3

Распределение фраз

Число слов	2-5	6-9	10-13	14-17	18-21	22-25	26-29	Свыше 30
Число предложений	14	36	85	180	294	420	310	132

**Задача 2.4.24.** Известно, что сахар слаще глюкозы, но глюкоза как составная часть джема обладает дополнительными положительными свойствами. Для оценки ее вкусовых свойств в джеме были взяты от трех производителей образцы земляничного и малинового джемов, изготовленных обычным способом и с заменой 1/4 части сахара на глюкозу. Определите, по какой измерительной шкале проведена оценка. Используя данные таблицы 2.4, ответьте на следующие вопросы:

1. Оказывает ли влияние замена части сахара глюкозой на: а) вкус джемов; б) заключение дегустаторов?

2. Одинаков ли эффект введения глюкозы в земляничный и малиновый джемы?

3. Согласуются ли эффекты на продукции разных предпринимателей?

4. Становится ли слаще джем при замене сахара глюкозой?

Таблица 2.4

## Результаты заключений дегустаторов

Производитель	Земляничный				Малиновый			
	Предпочитаемый состав	слаще			Предпочитаемый состав	слаще		
		Обычный состав	С глюкозой	Безразлично		Обычный	С глюкозой	Безразлично
А	Обычный	21	10	0	Обычный	17	18	0
	С глюкозой	7	6	0	С глюкозой	11	6	0
	Безразлично	2	0	2	Безразлично	2	1	1
В	Обычный	18	9	0	Обычный	13	9	0
	С глюкозой	11	7	0	С глюкозой	16	11	0
	Безразлично	1	0	1	Безразлично	1	1	2
С	Обычный	15	11	0	Обычный	15	11	0
	С глюкозой	10	9	1	С глюкозой	10	9	0
	Безразлично	5	1	1	Безразлично	5	0	1

**Задача 2.4.25.** По какой измерительной шкале определяются химические свойства элементов таблицы Менделеева? На чем основано сравнение их свойств?

**Задача 2.4.26.** В лаборатории, изучающей воздействие окружающей среды на человека, были проведены исследования мнений 10 женщин и 10 мужчин для того, чтобы установить наиболее комфортную комнатную температуру. В табл. 2.5 приведены результаты исследования. Определите примененную измерительную шкалу. Переведите результаты в международную стоградусную шкалу Цельсия. Рассчитайте характеристики, с помощью которых можно установить, одинакова ли температура наибольшего комфорта для мужчин и женщин.

Таблица 2.5

## Результаты исследования (в °F)

Мужчины	74	71	77	76	74	72	75	73	74	76
Женщины	75	77	78	79	77	73	72	78	76	80

**Задача 2.4.27.** Двух экспертов попросили оценить качество поверхности десяти экспериментальных кафельных плиток, присвоив им номера в порядке увеличения качества. Результаты экспертной оценки представлены в таблице 2.6. Определите вид измерительной шкалы и среднюю сумму рангов.

Таблица 2.6

## Результаты оценки качества плиток

Эксперт 1	10	9	6	7	8	4	5	1	2	3
Эксперт 2	9	7	10	6	8	5	4	1	3	2

**Задача 2.4.28.** Измерены отклонения от номинального размера в двух выборках деталей (таблица 2.7). Определите вид измерительной шкалы, рассчитайте средние отклонения в каждой выборке и характеристику их разброса.

Таблица 2.7

Результаты измерений отклонений в выборках, мкм

Выборка 1	-72	-50	11	0	-35	26	31	-17	-20	0	-20	-25	3	10	14	-6
Выборка 2	-10	36	12	-18	-22	-30	2	8	0	0	-40	-12	4	11	16	-24

Подсчитайте число бракованных изделий в каждой выборке, если предельно допустимые размеры деталей 20,47; 20,52 мм, номинальный размер 20,5 мм.

**Задача 2.4.29.** При проведении поверки вольтметра методом непосредственного сличения получены результаты, приведенные в таблице 2.8. Определите вид измерительной шкалы для оценки погрешности средства измерений. Вычислите абсолютную погрешность в каждой поверяемой отметке шкалы и вариацию показаний.

Таблица 2.8

Результаты поверки вольтметра

Значение поверяемой отметки шкалы, В		0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Показания вольтметра, В	прямой ход	0,05	3,1	5,95	8,9	12,2	15,6	17,5	20,2	24,0	26,9	29,8
	обратный ход	0,03	2,8	6,01	8,7	12,4	15,1	18,1	20,9	23,8	27,1	30,0

**Задача 2.4.30.** Оцените среднее время реакции трех групп пациентов на сделанную инъекцию (табл. 2.9). Определите вид измерительной шкалы.

Таблица 2.9

Время реакции, мин.

Группа 1	10,2	8,6	11,1	10,0	9,8	12,0	8,4	9,2	10,5	14,0	10,4
Группа 2	6,8	8,8	10,6	12,8	14,2	9,5	10,1	9,9	11,6	10,8	–
Группа 3	7,2	9,0	10,3	14,4	12,4	10,7	10,2	11,4	–	–	–

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

#### 3.1 Основные положения

##### 3.1.1. Вероятностно-статистические характеристики

Результаты измерений неизбежно содержат случайные погрешности, действие которых непредсказуемо. Поэтому результаты измерений рассматриваются как случайные величины с применением теории вероятностей.

Случайной величиной называют величину, которая в результате опыта принимает значение? заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. При проведении измерений внимание уделяется закономерностям случайных явлений, которые обладают относительной устойчивостью в их массовом проявлении. Случайное событие называется массовым, если может появиться в результате испытаний, которые могут быть повторены любое число раз при одних и тех же условиях. Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными (аналоговыми). Возможные значения дискретных случайных величин отделимы друг от друга и поддаются счету. Возможные значения непрерывных случайных величин неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал значений. Даже в любом конечном интервале непрерывная случайная величина имеет бесконечное множество значений.

Массовое случайное событие – результат многократных измерений – может быть охарактеризовано абсолютной частотой, относительной частотой, распределением вероятностей и функцией распределения вероятностей.

Абсолютная частота  $m_i$  – число появлений одного и того же события (значения результата измерений).

Относительная частота  $\frac{m_i}{n}$  – доля конкретного события

(конкретного значения результата измерений) в общем числе событий (далее – результатов измерений). Относительная частота

является показателем вероятности  $P_i$  дискретного результата измерений:

$$P_i = \frac{m_i}{n} \quad (3.1)$$

Распределение вероятностей представлено на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Дискретное распределение вероятностей

Функция распределения вероятностей  $F(Q)$  является функцией накопленных относительных частот:

$$F(Q) = \sum_{Q_i < Q} P(Q_i) \quad (3.2)$$

Дискретная функция распределения вероятности представлена на рис. 3.2.

Результат измерений при непрерывном отсчете описывается плотностью вероятности  $p(Q_i)$  текущего значения  $Q$  (рисунок 3.3, а) и функцией распределения вероятностей  $F(Q)$  (рисунок 3.3, б):

$$F(Q) = \int_{-\infty}^{Q_0} p(Q) dQ \quad (3.3)$$

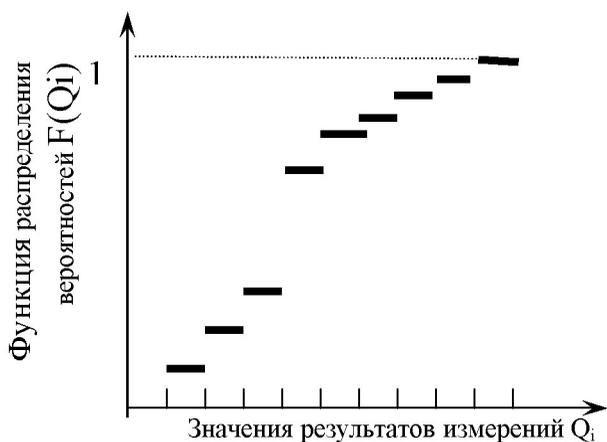


Рис. 3.2. Дискретная функция распределения вероятностей  $F(Q_i)$

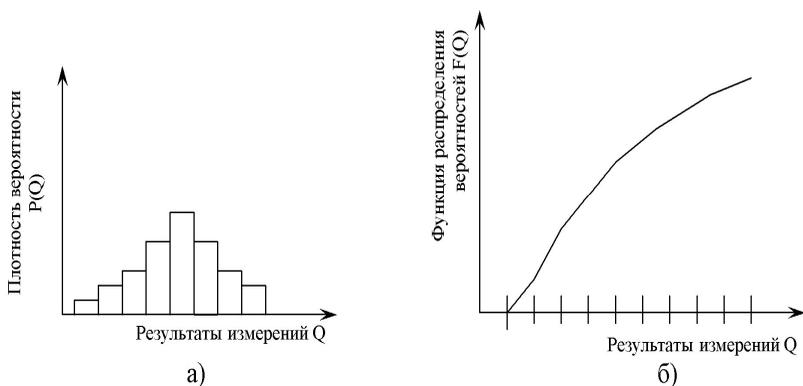


Рис. 3.3. Эмпирическая плотность вероятностей (а), функция распределения вероятностей (б)

Функция распределения вероятностей определяет вероятность того, что отдельный результат измерения  $Q$  при однократном измерении примет значение меньшее её аргумента. Чем больше результат измерения  $Q$ , тем больше вероятность того, что ни один результат измерений не превысит этого значения, т.е.  $F(Q)$  – неубывающая функция.

$F(Q_2) \geq F(Q_1)$ , если  $Q_2 > Q_1$ . При изменении  $Q$  от  $-\infty$  до  $+\infty$   $F(Q)$  изменяется от 0 до 1.

Результат измерений  $Q$  меньше некоторого  $Q_1$  с вероятностью  $F(Q_1)$  и меньше  $Q_2$  с вероятностью  $F(Q_2)$ . Причем  $Q_2 > Q_1$ . Тогда вероятность того, что результат измерений окажется в интервале значений от  $Q_1$  до  $Q_2$ :

$$P\left\{ Q_1 \leq Q \leq Q_2 \right\} = F(Q_2) - F(Q_1) \quad (3.4)$$

или

$$P\left\{ Q_1 \leq Q \leq Q_2 \right\} = \int_{-\infty}^{Q_1} p(Q) dQ - \int_{-\infty}^{Q_2} p(Q) dQ = \int_{Q_1}^{Q_2} p(Q) dQ \quad (3.5)$$

При расширении интервала интегрирования до бесконечности рассматриваемое событие становится достоверным, поэтому площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности вероятности для любого закона распределения и осью абсцисс, равна 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(Q) dQ = 1 \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Числовые (точечные) характеристики

Вероятностные характеристики результатов измерений являются наиболее полными, но не всегда удобны, а также не всегда достижимы, т.к. для их получения необходимо большое число экспериментальных данных. Поэтому чаще используют числовые характеристики через начальные и центральные моменты.

Начальные моменты получают усреднением значений относительно начала координат по правилу:

$$\bar{X}^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x) dx, \quad (3.7)$$

где  $r$  – номер (порядок) момента;

$x$  – случайная величина (результат измерений).

Первый начальный момент характеризует математическое ожидание отсчета при бесконечном повторении процедуры сравнения (измерения):

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (3.8)$$

Для дискретных результатов измерений:

$$M(x) \approx \bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i P_i \quad (3.9)$$

где  $\bar{X}$  – среднее арифметическое значение;  
 $x_i$  –  $i$ -й результат измерений;  
 $P_i$  – вероятность появления  $i$ -го результата;  
 $n$  – число результатов измерений;

$$P_i = \frac{m_i}{n} \quad (3.10)$$

где  $m_i$  – абсолютная частота  $i$ -го результата.

Тогда

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{m_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad (3.11)$$

$M(x)$  так же, как  $\bar{X}$  характеризует центр группирования результатов многократных измерений.

Центральные моменты получают усреднением значений относительно центра распределения, т.е. относительно математического ожидания или среднего арифметического значения, по правилу:

$$(x - \bar{X})^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^r p(x) dx \quad (3.12)$$

Второй центральный момент называется дисперсией  $D(x)$  и характеризует разброс экспериментальных данных относительно центра распределения.

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p(x) dx \quad (3.13)$$

Для дискретных величин

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 P_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 m_i \quad (3.14)$$

Часто в качестве характеристики разброса результатов измерений используется среднее квадратическое отклонение (СКО)-  $\sigma(x)$ :

$$\sigma^*(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 m_i}{n}} \quad (3.15)$$

$\sigma^*(x)$  - является смещенной оценкой СКО.

Если из общего числа данных при усреднении исключается одно значение, совпадающее с центром распределения, то такая оценка СКО является несмещенной:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 m_i}{n-1}} \quad (3.16)$$

Если каждый из результатов измерений встречается не более одного раза, то соответственно числовые характеристики определяются по формулам:

- среднее арифметическое значение:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (3.17)$$

- СКО:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (3.18)$$

Упрощенный расчет дисперсии можно выполнить по свойству дисперсии:

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) \quad (3.19)$$

Третий центральный момент  $(x - \bar{X})^3$  используется для характеристики асимметричности кривой распределения плотности вероятности. Асимметрия определяется по формуле:

$$\mu = \frac{(x - \bar{X})^3}{(\sigma^*(x))^3} \quad (3.20)$$

Четвертый центральный момент  $(x - \bar{X})^4$  используется для расчета эксцесса, характеризующего заостренность кривой распределения плотности вероятности:

$$v = \frac{(x - \bar{X})^4}{(\sigma^*(x))^4} \quad (3.21)$$

Характеристики с использованием центральных моментов приведены на рис. 3.4.

К числовым характеристикам также относятся мода и медиана. Модой  $M_0$  называется наиболее вероятное значение результата измерений. Мода соответствует абсциссе точки максимума кривой распределения плотности вероятности, как показано на рис. 3.5.

Медиана  $M_e$  — это значение результата измерений, относительно которого равновероятно, что результат измерений окажется меньше или больше медианы:

$$P(x < M_e) = P(x > M_e) = 0,5 \quad (3.22)$$

На рисунке 3.5 медианой является значение абсциссы перпендикуляра к оси абсцисс, относительно которого площадь под кривой распределения плотности вероятности делится пополам.

Для симметричных распределений все три характеристики – математическое ожидание, мода и медиана – совпадают.

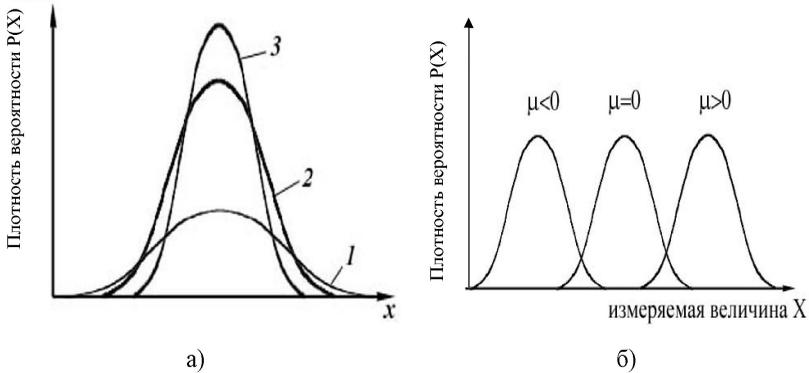


Рис. 3.4. Числовые характеристики результатов измерений  
а).СКО и эксцесс; б).асимметрия

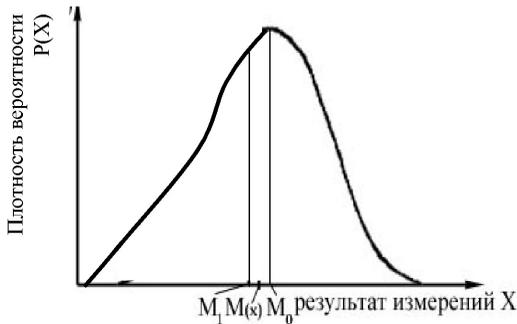


Рис. 3.5. Математическое ожидание, мода, медиана

### 3.1.3. Интервальная характеристика

При повторных измерениях одного и того же размера могут быть получены различные значения. Это объясняется действием случайных погрешностей. Это действие оценивается вероятностным разбросом результатов многократных измерений в виде доверительного интервала.

Доверительный интервал представляет собой интервал значений, в пределы которого входит измеренный размер с доверительной вероятностью. Доверительный интервал определяется по формуле:

$$\bar{X} - t_p \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq X \leq \bar{X} + t_p \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad (3.23)$$

где  $n$  – число измерений;

$\bar{X}$  – среднее арифметическое значение результата измерений;

$S$  – СКО результата измерений:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (3.24)$$

$t_p$  – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $P$ .

Значение доверительной вероятности задается до начала измерений и обычно равно 0,95. Другие её значения специально оговариваются.

### 3.2. Вопросы для самопроверки

1. Почему результаты измерений рассматриваются как случайные величины?
2. Какая величина является случайной?
3. Что такое массовое событие?
4. Что называется дискретной случайной величиной?
5. Какие случайные величины называются аналоговыми?
6. Какими вероятностными характеристиками можно описать случайную величину?
7. Как определить абсолютную частоту?
8. Что характеризует относительная частота?
9. Как определить функцию распределения вероятностей для случайной величины: а) дискретной; б) аналоговой?

10. Изобразите графически распределения вероятностей, плотности вероятности, функцию накопленных относительных частот и функцию распределения вероятностей.

11. Что определяет функция распределения вероятностей?

12. Как определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал на основании известной а) функции распределения вероятностей; б) плотности распределения вероятностей?

13. Почему для описания случайной величины чаще используются числовые характеристики?

14. Как определяются: а) начальные моменты; б) центральные моменты?

15. Как называется, как определяется и что характеризует первый начальный момент?

16. Какие центральные моменты используются для характеристик случайных величин?

17. Какими характеристиками определяется разброс случайных величин?

18. Определите степень размерности, которую могут иметь: а) дисперсия; б) СКО.

19. Приведите формулы для расчета дисперсии: а) если для каждого результата измерений задана абсолютная частота; б) если значения результатов измерений не повторяются; в) с использованием математического ожидания; г) с использованием вероятностей получения каждого результата.

20. Что характеризует и как определяется асимметрия?

21. Что такое эксцесс, и через какой момент определяется его значение?

22. Что определяют для случайной величины: а) статистическая мода; б) статистическая медиана?

23. Что называется доверительным интервалом?

24. Почему результат многократных измерений представляют в форме доверительного интервала?

25. Что такое доверительная вероятность?

### 3.3. Примеры решения задач

**Задача 3.3.1.** Произведены измерения выходного напряжения в выборке из партии микросхем. Результаты измерений представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Результаты измерений напряжения

Интервалы значений напряжения U, мВ	210-212	212-214	214-216	216-218	218-220	220-222	222-224
Число значений $m_i$	5	12	28	75	52	20	8

Определите характеристики результата измерений выходного напряжения:

а) вероятностные – в виде гистограммы и функции накопленных частот;

б) числовые – в виде среднего арифметического значения и СКО;

в) интервальную – в виде доверительного интервала.

Решение.

а) Число значений в каждом интервале  $m_i$  является абсолютной частотой. Рассчитываем относительные частоты для каждого интервала:

$$P_i = \frac{m_i}{n}, \quad (3.25)$$

где  $n$  – общее число результатов измерений:

$$n = \sum_{i=1}^r m_i, \quad (3.26)$$

где  $r$  – число интервалов,  $r = 7$ .

$$n = 5+12+28+75+52+20+8=200$$

$$P_1 = \frac{5}{200} = 0,025; P_2 = \frac{12}{200} = 0,06;$$

$$P_3 = \frac{28}{200} = 0,14; P_4 = \frac{75}{200} = 0,375;$$

$$P_5 = \frac{52}{200} = 0,26; P_6 = \frac{20}{200} = 0,1; P_7 = \frac{8}{200} = 0,04.$$

Определяем ширину интервала:

$$h = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{r} \quad (3.27)$$

где  $U_{\max}$  и  $U_{\min}$  – наибольшее и наименьшее значения напряжения.

$$h = \frac{224 - 210}{7} = 2 \text{ (мВ)}$$

Рассчитываем аналог плотности вероятности:

$$P_i = \frac{m_i}{n \cdot h} = \frac{P_i}{h} \quad (3.28)$$

$$P_1 = \frac{0,025}{2} = 0,0125; P_2 = \frac{0,06}{2} = 0,03$$

$$P_3 = \frac{0,14}{2} = 0,07; P_4 = \frac{0,375}{2} = 0,1875;$$

$$P_5 = \frac{0,26}{2} = 0,13; P_6 = \frac{0,1}{2} = 0,05; P_7 = \frac{0,04}{2} = 0,02.$$

Строим гистограмму, отложив по оси ординат величины  $P_i$ , как показано на рис. 3.6, а.

Рассчитываем накопленные относительные частоты  $F_i$  для каждого интервала:

$$F_i = \sum_{i=1}^r P_i \quad (3.29)$$

$$F_1 = P_1 = 0,025;$$

$$F_2 = P_1 + P_2 = 0,025 + 0,06 = 0,085;$$

$$F_3 = P_1 + P_2 + P_3 = 0,025 + 0,06 + 0,14 = 0,225;$$

$$F_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 = 0,6;$$

$$F_5 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 + 0,26 = 0,86;$$

$$F_6 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 + 0,26 + 0,1 = 0,96;$$

$$F_7 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 + 0,26 + 0,14 + 0,04 = 1;$$

б) Для расчета числовых характеристик определим середину каждого интервала:

$$x_i = \frac{x_{H_i} + x_{B_i}}{2} \quad (3.30)$$

где  $x_{H_i}, x_{B_i}$  – нижняя и верхняя границы  $i$ -го интервала.

$$x_1 = 211\text{мВ}; \quad x_2 = 213\text{мВ}; \quad x_3 = 215\text{мВ}; \quad x_4 = 217\text{мВ}; \quad x_5 = 219\text{мВ};$$

$$x_6 = 221\text{мВ}; \quad x_7 = 223\text{мВ}.$$

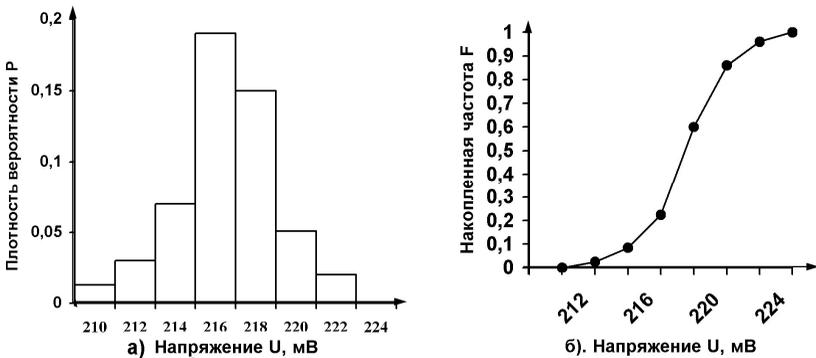


Рис. 3.6. Гистограмма (а) и функция накопленных относительных частот (б)

Среднее арифметическое значение определяем по формуле (3.11):

$$\bar{X} = \frac{1}{200} \cdot (211 \cdot 5 + 213 \cdot 12 + 215 \cdot 28 + 217 \cdot 75 + 219 \cdot 52 + 221 \cdot 20 + 223 \cdot 8) = 217,49 \text{ (мВ)}$$

СКО рассчитываем по формуле (3.16). Для небольшого числа данных СКО генеральной совокупности  $\sigma(x)$  заменяем на выборочное СКО  $S$ .

$$\sigma(x) \approx S = \sqrt{\frac{(211-217,49)^2 \cdot 5 + (213-217,49)^2 \cdot 12 + (215-217,49)^2 \cdot 28 + (217-217,49)^2 \cdot 75}{200-1}}$$

$$\sqrt{\frac{(219-217,49)^2 \cdot 52 + (221-217,49)^2 \cdot 20 + (223-217,49)^2 \cdot 8}{200-1}} = \sqrt{\frac{125198}{199}} = \sqrt{6,291356784} =$$

$$= 2,508257719 \text{ (мВ)}$$

в) Рассчитываем доверительный интервал по формуле (3.23). Так как значение доверительной вероятности не задано, то принимаем  $P=0,95$  по приложению А определяем значение коэффициента Стьюдента  $t_p=1,96$ .

Доверительный интервал:

$$217,49 - 1,96 \cdot \frac{2,508}{\sqrt{200}} \leq X \leq 217,49 + 1,96 \cdot \frac{2,508}{\sqrt{200}}$$

$$217,49 - 0,34759 \leq X \leq 217,49 + 0,34759$$

$$217,14241 \text{ мВ} \leq X \leq 217,83759 \text{ мВ}$$

$$217,14 \text{ мВ} \leq X \leq 217,84 \text{ мВ}$$

**Задача 3.3.2.** Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания  $P_n$  при каждом выстреле равна 0,6. На стрельбу отпущено 4 снаряда. Вычислить для числа израсходованных снарядов: математическое ожидание, дисперсию и СКО.

Решение.

Число израсходованных снарядов  $x$  может принимать значения:  $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ . Определим вероятности этих значений.

Вероятность попадания 0,6, тогда вероятность промаха  $P_n = 1 - 0,6 = 0,4$ . Если на стрельбу потребовался только 1 снаряд, то значит попали в цель с 1-го раза, т.е.  $P_1=0,6$ . При необходимости в двух снарядах – первым не попали, а поразили цель вторым. Т.е. для  $x_2=2$ :

$$P_2 = P_n \cdot P_n \tag{3.31}$$

$$P_2 = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

Для  $x_3=3$ :

$$P_3 = P_n \cdot P_n \cdot P_n = P_n^2 \cdot P_n \tag{3.32}$$

$$P_3 = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,096;$$

Для  $x_4=4$  вероятность определяется двумя ситуациями: либо не попали всеми четырьмя снарядами, либо попали последним снарядом:

$$P_4 = P_H^4 + P_H^3 P_{\bar{H}} \quad (3.33)$$

$$P_4 = 0,4^4 + 0,4^3 \cdot 0,6 = 0,4^3 (0,4 + 0,6) = 0,4^3 = 0,064.$$

Математическое ожидание:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i \quad (3.34)$$

$$M(x) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,096 + 4 \cdot 0,064 = 1,624 \approx 1,6 \text{ (снаряда)}$$

Дисперсия:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot P_i \quad (3.35)$$

$$D(x) = (1-1,6)^2 \cdot 0,6 + (2-1,6)^2 \cdot 0,24 + (3-1,6)^2 \cdot 0,096 + (4-1,6)^2 \cdot 0,064 = 0,8112 \text{ (снаряда}^2\text{)};$$

$$\text{СКО:} \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} \quad (3.36)$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0,8112} = 0,9007 \approx 0,9 \text{ (снаряда)}$$

**Задача 3.3.3.** Средний процент выпуска брака на предприятии 1,2%. СКО брака  $\sigma(x) = 0,15\%$ . Определите вероятность того, что в отдельные дни процент брака будет находиться в пределах от 0,8% до 1,4%. Предполагается, что величина подчиняется нормальному закону распределения.

Решение.

Соответствие нормальному закону распределения позволяет для определения вероятности измеряемой величины воспользоваться функцией Лапласа (приложение Б).

Определим для каждой границы интервала значение квантили:

$$t_H = \frac{|x_H - \bar{X}|}{\sigma}; \quad t_B = \frac{|x_B - \bar{X}|}{\sigma} \quad (3.37)$$

где  $x_H$  – нижняя граница интервала;

$x_B$  – верхняя граница интервала.

$$t_H = \frac{0,8 - 1,2}{0,15} = 2,67; \quad t_B = \frac{1,4 - 1,2}{0,15} = 1,33$$

По приложению Б определяем значения функции Лапласа для найденных значений квантилей:

$$\Phi(t_H) = \Phi(2,67) = 0,4962; \quad \Phi(t_B) = \Phi(1,33) = 0,4082.$$

Рассчитываем вероятность попадания величины в интервал  $[t_H; t_B]$ :

$$P = \Phi(t_H) + \Phi(t_B) \quad (3,38)$$

$$P = 0,4962 + 0,4082 = 0,9044$$

**Задача 3.3.4.** Определите минимальный объем выборки  $n$ , чтобы с надежностью 0,96 точность оценки математического ожидания измеренного параметра партии с помощью выборочного среднего равна 1,2 мм, если СКО  $\sigma$  равно 0,8 мм.

Решение.

Исходя из формулы (3.23) отклонение от математического ожидания оценивается доверительной погрешностью:

$$\varepsilon = t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.39)$$

$$\text{Тогда} \quad n = \left( \frac{t_p \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad (3.40)$$

$$\sigma = 0,8 \text{ мм}; \quad \varepsilon = 1,2 \text{ мм}.$$

Коэффициент Стьюдента можно определить по приложению Б:

$$\Phi(t_p) = \frac{P}{2} \quad (3.41)$$

$$\Phi(t_p) = \frac{0,96}{2} = 0,48; \quad t_p = 2,055.$$

Объем выборки:

$$n = \left( \frac{2,055 \cdot 0,8}{1,2} \right)^2 = 1,8769 \approx 2 \text{ (шт.)}$$

### 3.4. Задачи

**Задача 3.4.1.** Произведены прямые измерения диаметра валов в выборке. Результаты измерений представлены в виде отклонений от номинального значения. Экспериментальные данные распределены по интервалам и представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Результаты измерений

Интервалы отклонений от номинального значения, мкм	-50;-40	-40;-30	-30;-20	-20;-10	-10;0	0;10	10;20	20;30	30;40	40;50
Число экспериментальных данных $m_i$	3	10	21	35	48	60	39	23	14	6

Постройте гистограмму эмпирического распределения и функцию накопленных относительных частот; определите доверительный интервал для измеренного диаметра в выборке для доверительной вероятности  $P=0,98$ .

**Задача 3.4.2.** Измерена выборка объемом  $n=100$  из большой партии пакетов фруктового сока. Средний вес пакета оказался равным 1050г. Определить с надежностью 0,95 доверительный интервал для среднего веса пакета сока во всей партии, если СКО веса составляет 20г.

**Задача 3.4.3.** Результаты многократных измерений напряжения в электрической сети:

$U_i, В \dots$	218	219	220	221	222
$m_i \dots$	5	12	24	15	7

Оцените с надежностью 0,96 математическое ожидание  $M(x)$  напряжения, распределенного по нормальному закону, при помощи доверительного интервала.

**Задача 3.4.4.** Произведено 10 прямых измерений электрической мощности ваттметром. Результаты измерений, кВт: 2,5; 2,2; 2,3; 2,0; 2,4; 2,3; 2,4; 2,1; 2,2; 2,4, подчинены нормальному закону. Найдите оценку для математического ожидания  $M(x)$  и

постройте доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности  $P=0,95$ .

**Задача 3.4.5.** Ряд распределения входной величины  $X$  измерительного преобразователя имеет вид:

$X_i \dots$	1	2	3	4	5
$P_i \dots$	0,1	0,15	0,5	0,2	0,05

Вычислите математическое ожидание и дисперсию отклика  $Y$  измерительного преобразователя, имеющего функцию преобразования вида  $Y=1,8+3x$ .

**Задача 3.4.6.** В течение суток регистрирующее устройство контроля каждый час фиксирует температуру в климатической камере. После первичной обработки данных получено распределение температуры по интервалам:

Интервалы, °C	170-174	174-178	178-182	182-186	186-200
Число результатов измерений $m_i$	2	4	9	6	3

Определить вероятностные, числовые и интервальную характеристики температуры в камере.

**Задача 3.4.7.** Измерения потери веса образцов хлебобулочных изделий при определении влажности дали следующие результаты: 12,5; 13,1; 14; 11,7; 15,2; 14,3; 12,8; 12,2; 14,5; 13,6 г. Определите среднюю потерю веса и вероятность того, что результат измерений будет находиться в пределах от 12,4 до 14,4 г.

**Задача 3.4.8.** При поверке омметра установлено, что 80% погрешностей результатов измерений не превышают  $\pm 0,5$  Ом. Полагая распределение погрешностей нормальным, определите вероятность того, что погрешность результата превысит 1 Ом.

**Задача 3.4.9.** В результате поверки вольтметра установлено, что 70% всех погрешностей показаний прибора не превышает 1 В. Полагая распределение погрешностей нормальным, определите среднюю квадратическую погрешность.

**Задача 3.4.10.** Многократные измерения частоты частотомером показали, что 60% всех результатов находятся в пределах от 10 до 14 кГц. Оцените точность частотомера и определите предельную погрешность результата из 16 измерений.

**Задача 3.4.11.** Определите вероятность того, что погрешность среднего результата из 25 измерений при среднеквадратической погрешности 4% не превысит  $\pm 1\%$ .

**Задача 3.4.12.** Каким должен быть минимальный объем выборки  $n$ , чтобы с надежностью 0,96 точность оценки математического ожидания  $M(x)$  измеряемого размера в партии изделий с помощью выборочного среднего равна 0,8 мм, если СКО  $\sigma(x)=1$ мм ?

**Задача 3.4.13.** Сколько раз надо повторить измерения, чтобы была вероятна погрешность, в 2 раза превышающая среднеквадратическую погрешность?

**Задача 3.4.14.** Сколько повторных измерений надо провести, чтобы была вероятна погрешность, превышающая предельную погрешность  $1,5 \sigma$ ?

**Задача 3.4.15.** Сколько раз необходимо повторить измерения напряжения, чтобы хотя бы один раз в ряду результатов появилась погрешность, превышающая  $\pm 10$ В с вероятностью не менее 0,98 , если применяемый метод измерений напряжения обеспечивает СКО результата 5В.

**Задача 3.4.16.** Метод измерений емкости с помощью электроизмерительного моста обеспечивает СКО результатов в пределах 0,2 мкФ. Определите:

а) пригоден ли этот метод для однократного измерения емкости 20 мкФ с допускаемой погрешностью  $\pm 2\%$  при доверительной вероятности 95%.

б) сколько измерений необходимо провести данным методом, чтобы погрешность среднего результата не превысила  $\pm 0,1$  мкФ с доверительной вероятностью 96%.

**Задача 3.4.17.** Проведены 9 многократных измерений силы тока амперметром, имеющим погрешность  $\sigma_1=20$ мА. В результате измеренная сила тока оценена с доверительной погрешностью  $\varepsilon=15$  мА. Сколько необходимо провести измерений, чтобы такая же погрешность с такой же вероятностью была получена при использовании другого амперметра с  $\sigma_2 = 40$  мА?

**Задача 3.4.18.** Для результатов измерений толщины диэлектрика постройте гистограмму и определите с вероятностью 0,98 доверительный интервал. Толщина диэлектрика, мм:

10,326	10,052	9,899	9,760	9,856
10,002	10,046	9,464	9,940	9,994
10,010	10,018	9,936	10,006	10,046
9,992	9,872	9,808	10,012	10,006
9,999	9,966	10,080	9,958	10,029
10,004	9,958	10,030	9,990	10,018
9,894	10,028	9,780	9,690	10,008
10,014	10,144	9,970	10,032	9,899
10,030	10,025	10,100	10,014	9,950
9,996	10,000	10,005	10,016	9,946

**Задача 3.4.19.** Постройте для данных задачи 3.3.18 эмпирическую функцию распределения вероятностей и определите вероятность появления значений толщины диэлектрика, превышающих 10,050 мм.

**Задача 3.4.20.** Рассчитайте для данных задачи 3.3.18 среднее арифметическое значение, СКО, асимметрию, эксцесс. Определите, в каком интервале находится мода и какому значению равна медиана результатов измерений.

**Задача 3.4.21.** Из партии изделий контролёр отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что случайно взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,7. Определите вероятность того, что из трёх проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

**Задача 3.4.22.** Измерительное устройство состоит из трёх блоков, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за время  $T$  для каждого блока соответственно равны: 0,6; 0,75; 0,89. Найдите вероятности того, что за время  $T$  безотказно будут работать: а) только одни элементы; б) только два элемента; в) все три элемента; г) ни один элемент.

**Задача 3.4.23.** Вероятности того, что необходимая для селективной сборки деталь находится в первом, втором, третьем, четвёртом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найдите вероятности того, что деталь находится: а) не более, чем в трёх ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

**Задача 3.4.24.** Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле 0,7. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,5, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

**Задача 3.4.25.** В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов каждого элемента соответственно равны 0,15; 0,25; 0,3. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

**Задача 3.4.26.** Техническое устройство содержит два независимо работающих элемента, вероятности отказа которых соответственно равны 0,065 и 0,078. Найдите вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

**Задача 3.4.27.** Три исследователя, независимо один от другого, измеряют некоторую физическую величину. Вероятности их ошибок при снятии показаний приборов соответственно равны 0,15; 0,20; 0,25. Найдите вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из них допустит ошибку.

**Задача 3.4.28.** Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,4. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый должен сделать по два выстрела. Определите вероятность того, что стрелок попадёт в мишень.

**Задача 3.4.29.** Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при четырёх выстрелах равна 0,7599. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

**Задача 3.4.30.** Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра от номинального размера по абсолютной величине менее 0,7 мм. Определите, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных, если случайная величина распределена нормально с СКО  $\delta = 0,4$  мм.

**Задача 3.4.31.** Результат измерений напряжения, среднее арифметическое значение которого 6,32 В, попадает в интервал от 5,014 до 6,626 В с вероятностью, равной 0,39. Чему равна вероятность попадания результата измерений в интервал от 4,922 до 7,718 В?

**Задача 3.4.32.** Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Какова вероятность отсчета времени с ошибкой более 0,05 с по этому секундомеру, если отсчет выполняется с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону?

**Задача 3.4.33.** Азимутальный лимб имеет цену деления  $1^\circ$ . Какова вероятность сделать ошибку в пределах  $\pm 10'$  при измерении азимутального угла, если результат отсчета округляется до ближайшего целого числа градусов?

**Задача 3.4.34.** По результатам измерений 100 резисторов, случайно отобранных из большой партии однотипных изделий, получена оценка сопротивления  $\bar{R} = 10$  кОм. Найдите:

а) вероятность того, что для резисторов всей партии значения сопротивления находятся в пределах  $(10 \pm 0,1)$  кОм при СКО  $\delta = 1$  кОм.

б) количество измерений, при которых с вероятностью 0,95 можно утверждать, что для всей партии резисторов значения сопротивления находятся в пределах  $(10 \pm 0,1)$  кОм.

**Задача 3.4.35.** При сборке измерительного устройства для наиболее точной регулировки основного узла может потребоваться (в зависимости от удачи) 1, 2, 3, 4, 5 проб деталей с вероятностями, соответственно равными 0,07; 0,21; 0,55; 0,16; 0,01. Сколько деталей необходимо сборщику для сборки 30 приборов?

**Задача 3.4.36.** При производстве стальных цилиндрических стержней проверка соответственно наружного диаметра показала, что 5% изделий имеют больший диаметр, чем это допустимо, 91% изделий находится в установленных границах и 4% имеют диаметр меньше допустимого. Какова вероятность обнаружить в выборке из 10 независимо отобранных образцов.

а) ровно один образец с большим диаметром и один с меньшим диаметром, чем это допустимо;

б) все годные образцы;

в) по крайней мере, один образец с диаметром вне установленных границ?

**Задача 3.4.37.** Из партии, включающей 25 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом для проверки их качества 3 изделия. Найдите математическое ожидание и СКО нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

**Задача 3.4.38.** Размер шарика для подшипников  $X$ . При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на 0.1 мм. Известно, что средний размер диаметра шарика  $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$ , а брак составляет 10% всего выпуска. Определите СКО  $\sigma(x)$  диаметра шарика.

**Задача 3.4.39.** Возможные значения дискретной случайной величины  $X$ :

$x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ ; математические ожидания этой величины и её квадрата:  $M(X) = 0,1$ ;  $M(X^2) = 0,9$ . Найдите вероятности, соответствующие значениям  $x_1, x_2, x_3$ .

**Задача 3.4.40.** Найдите вероятности возможных значений дискретной случайной величины  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ , если известны математические ожидания этой величины и её квадрата:  $M(X) = 2,3$ ;  $M(X^2) = 5,9$ .

**Задача 3.4.41.** Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки измерения подчиняются нормальному закону распределения. Сколько надо провести измерений для определения оценки СКО прибора, чтобы с доверительной вероятностью 70% абсолютная величина ошибки определения этой величина была не более 20% от  $\sigma(\bar{X}_n)$ ?

**Задача 3.4.42.** В цехе завода выпускаются валы электродвигателей. Из продукции одного станка произвольно выбирают 50 изделий, измеряют их диаметры и вычисляют значение выборочного среднего  $\bar{X} = 42,972$  мм. По техническим условиям станок настраивается на номинальный размер 43 мм. Можно ли на основании полученных результатов сделать вывод о том, что станок обеспечивает заданный номинальный размер, или полученные данные свидетельствуют о неудовлетворительной наладке технологического оборудования. Контролируемый признак имеет нормальное распределение с дисперсией  $\sigma^2 = 0,01$  мм<sup>2</sup>.

## 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

### 4.1. Основные положения

При многократных измерениях одного и того же размера результаты группируются около среднего значения. Отклонения от центра группирования не должны значительно превышать СКО. В противном случае можно предположить, что результат измерений содержит грубую погрешность или, как говорят, является промахом.

Установлены критерии для выявления промахов. Если априорно известна точность измерений через величину СКО ( $\sigma$ ), то при нормальном распределении экспериментальных данных предельно допустимые отклонения от среднего значения, составляют не более чем:

- $\frac{2}{3} \sigma$  с вероятностью не менее  $P=0,5$ ;
- $\sigma$  с вероятностью не менее  $P=0,68$ ;
- $2 \sigma$  с вероятностью не менее  $P=0,95$ ;
- $2,6\sigma$  с вероятностью не менее  $P=0,99$ ;
- $3 \sigma$  с вероятностью не менее  $P=0,997$ .

Последнее условие является «правилом трёх сигм»: если при многократных измерениях одного и того же постоянного размера сомнительное значение результата измерений отличается от среднего значения больше, чем на  $3\sigma$ , то его следует отбросить, так как вероятность того, что оно является следствием случайного рассеяния экспериментальных данных ничтожно мала  $P=0,003$ .

В большинстве случаев СКО измерений заранее не известно. При малом числе измерений  $n \leq 20$  для выявления промахов можно применить критерий Романовского. Вычисляется:

$$t_i = \frac{|x_i - \bar{X}|}{S}, \quad (4.1)$$

где  $x_i$  – проверяемое экспериментальное данное.

Значение  $t_i$  сравнивается с табличным  $t_T$ . Если  $t_i \geq t_T$ , то  $x_i$  считается промахом. Значения критерия Романовского приведены в приложении В.

При большом числе измерений  $20 < n < 100$  используется критерий Шарлье. Промахами считаются результаты, для которых выполняется неравенство:

$$\left| x_i - \bar{X} \right| > K_{ш} \cdot S, \quad (4.2)$$

где  $K_{ш}$  – значения критерия Шарлье приведены в приложении Г.

При небольшом числе экспериментальных данных можно применить вариационный критерий Диксона, имеющий малые вероятности ошибок. Расчётное значение критерия  $K_D$  для проверяемого, крайнего в вариационном ряду, данного  $x_n$  определяется по формуле:

$$K_{D} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}, \quad (4.3)$$

Проверяемое данное является промахом, если выполняется неравенство:

$$K_D > z_q, \quad (4.4)$$

где значения  $z_q$  определяются по приложению Д для числа измерений  $n$  и заданного уровня значимости  $q$ .

При большом числе экспериментальных данных  $n > 50$  критическое значение  $t_T$  можно определить по формуле:

$$t_T = t_{\frac{P}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n}}, \quad (4.5)$$

где  $t_{\frac{P}{2}}$  – квантиль функции Лапласа для значения функции  $\frac{P}{2}$ ;

$P$  – доверительная вероятность.

## 4.2. Вопросы для самопроверки

1. Что такое «промах»?
2. Какими устанавливаются критические значения для выявления промахов, если априорно известна точность измерений?
3. В чем заключается правило «трех сигм»?
4. Когда используется критерий: а) Романовского; б) Шарлье; в) Диксона?
5. Как выявить промах по критерию: а) Романовского; б) Шарлье; в) Диксона?

## 4.3. Примеры решения задач

**Задача 4.3.1.** Измерения толщины металлического покрытия дали следующие результаты: 12,3; 12,0; 11,9; 12,5; 11,8; 11,6; 12,8; 11,2; 13,0; 10,8 мкм. Определите, содержится ли грубая погрешность в экспериментальных данных при уровне значимости 5%.

Решение.

Упорядочим результаты измерений в вариационный ряд: 10,8; 11,2; 11,6; 11,8; 11,9; 12,0; 12,3; 12,5; 12,8; 15,0 мкм.

Применим критерий Романовского.

Рассчитаем среднее арифметическое значение:

$$\bar{X} = \frac{10,8 + 11,2 + 11,6 + 11,8 + 11,9 + 12,0 + 12,3 + 12,5 + 12,8 + 15,0}{10} = 12,19 \text{ (мкм)}$$

СКО результатов измерений:

$$S = \sqrt{\frac{(10,8 - 12,19)^2 + (11,2 - 12,19)^2 + (11,6 - 12,19)^2 + (11,8 - 12,19)^2 + (11,9 - 12,19)^2 + (12,0 - 12,19)^2 + (12,3 - 12,19)^2 + (12,5 - 12,19)^2 + (12,8 - 12,19)^2 + (15,0 - 12,19)^2}{10 - 1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(10,8 - 12,19)^2 + (12,5 - 12,19)^2 + (12,8 - 12,19)^2 + (15,0 - 12,19)^2}{10 - 1}} = 1,15 \text{ (мкм)}$$

Проверяем крайние значения вариационного ряда (4.1):

$$t_1 = \frac{|10,8 - 12,19|}{1,15} = 1,209$$

По приложению В  $t_T=2,414$  для  $q=5\%$  и  $n=10$ .  
 $t_1 < t_T$ , следовательно, значение 10,8 мкм не является промахом.

$$t_2 = \frac{|15 - 12,19|}{1,15} = 2,444$$

$t_2 > t_T$ , следовательно значение 15 мкм является промахом, его следует исключить из ряда экспериментальных данных.

Рассчитываем по исправленным данным среднее арифметическое значение и СКО:  $\bar{X} = 11,88$  мкм;  $S = 0,626$  мкм.

Проверяем крайнее после исключённого значение:

$$t_3 = \frac{|12,8 - 12,19|}{0,626} = 1,4697$$

$t_T=2,349$  для  $q=5\%$  и  $n=9$ .

$t_3 < t_T$ , следовательно значение 12,8 мкм не содержит грубую погрешность.

Применим вариационный критерий Диксона.

Проверяем значение 15 мкм:  $K_{D1} = \frac{15 - 12,8}{15 - 10,8} = 0,524$

$K_{D1} > z_{0,05}$ , так как для  $n=10$  по приложению Д  $z_{0,05}=0,41$ .

Следовательно, значение 15 мкм является промахом, и его исключают из экспериментальных данных.

Проверяем значение 12,8 мкм:

$$K_{D2} = \frac{12,8 - 12,5}{12,8 - 10,8} = 0,15$$

$K_{D2} < z_{0,05}$ , и значение 12,8 мкм не является промахом.

**Задача 4.3.2.** Проведены прямые многократные измерения кислотности раствора, представленные в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Результаты измерений кислотности раствора

Результаты измерений, pH	0,6	0,75	0,82	0,91	0,95	1,2
Число измерений, $m_i$	1	6	20	18	4	1

Проверьте ряд на отсутствие промахов при уровне значимости  $\alpha=5\%$ .

Решение.

Воспользуемся критерием Шарлье. Рассчитаем среднее арифметическое значение и СКО:

$$\bar{X} = \frac{0,6 + 0,75 \cdot 6 + 0,82 \cdot 20 + 0,91 \cdot 18 + 0,95 \cdot 4 + 1,2}{50} = 0,8696 \approx 0,87(pH)$$

$$S = \sqrt{\frac{(0,6-0,87)^2 + (0,75-0,87)^2 \cdot 6 + (0,82-0,87)^2 \cdot 20 + (0,91-0,87)^2 \cdot 18 + (0,95-0,87)^2 \cdot 4 + (1,2-0,87)^2}{50-1}}$$

$$\sqrt{\frac{+(1,2-0,87)^2}{50-1}} = \sqrt{\frac{0,3726}{49}} = 0,087(pH)$$

$K_{ш}$  определяем по приложению Г: для  $n=50$   $K_{ш}=2,32$ .

Проверяем значение 0,6 рН:

$$|0,6 - 0,87| > 2,32 \cdot 0,087$$

$$0,27 pH > 0,202 pH.$$

Значение 0,6 рН является промахом.

Для значения 1,2 рН:  $|1,2 - 0,87| > 2,32 \cdot 0,087$

$$0,33 pH > 0,202 pH.$$

Значение 1,2 рН является промахом.

После исключения значений 0,6 и 1,2 рН пересчитываем среднее арифметическое значение и СКО:

$$\bar{X} = \frac{0,75 \cdot 6 + 0,82 \cdot 20 + 0,91 \cdot 18 + 0,95 \cdot 4}{48} = 0,8558 \approx 0,86 (pH)$$

$$S = \sqrt{\frac{(0,75-0,86)^2 \cdot 6 + (0,82-0,86)^2 \cdot 20 + (0,91-0,86)^2 \cdot 18 + (0,95-0,86)^2 \cdot 4}{48-1}} = \sqrt{\frac{0,182}{47}} = 0,062(pH)$$

Проверяем значение 0,75 рН:

$$|0,75 - 0,86| < 2,32 \cdot 0,062$$

$$0,11 pH < 0,144 pH$$

Значение 0,75 рН не является промахом.

Проверим наличие промахов в ряду результатов измерений по предельно допустимому значению квантили  $t_T$ :

$$\frac{P}{2} = \frac{1 - 0,05}{2} = 0,475.$$

По приложению Б  $t_{\frac{P}{2}} = 1,96$ .

По формуле (4.5): 
$$t_T = 1,96 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = 1,94$$

Для значения 0,6 рН по формуле (4.1):

$$t_1 = \frac{|0,6 - 0,87|}{0,087} = 3,1$$

$t_1 > t_T$ , следовательно, значение 0,6 рН является промахом.

Для значения 1,2 рН: 
$$t_2 = \frac{|1,2 - 0,87|}{0,087} = 3,79$$

$t_2 > t_T$ , следовательно значение 1,2 рН является промахом.

Исключаем эти значения из результатов измерений и проверяем оставшиеся крайние значения ряда: 0,75 и 0,95 рН

$$t_3 = \frac{|0,75 - 0,86|}{0,062} = 1,77; t_4 = \frac{|0,95 - 0,86|}{0,062} = 1,45$$

$t_3 < t_4$  и  $t_4 < t_T$ , следовательно значения 0,75 pH и 0,95 pH не являются промахами.

Критическое значение  $t_T$  можно с исключением каждого данного не пересчитывать, так как оно меняется не существенно с изменением  $n$ .

#### 4.4. Задачи

**Задача 4.4.1.** Измерения диаметра отверстия дали следующие результаты, мм: 10,22; 8,50; 9,18; 9,2; 10,15; 9,84; 12; 10,0; 9,68; 9,44.

Проверьте ряд на отсутствие промахов при уровнях значимости  $q=0,1\%$ ;  $1\%$ ;  $5\%$ ;  $10\%$ . При каком уровне значимости можно принять все значения?

**Задача 4.4.2.** Измерения электрического сопротивления в выборке из партии резисторов дали результаты, представленные в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Результаты измерений электрического сопротивления

Результаты измерений, <i>кОм</i>	7	9,5	9,8	10,5	11	11,2	14
Число результатов измерений, <i>m<sub>i</sub></i>	2	8	14	25	16	5	1

Проверьте ряд на отсутствие промахов при доверительной вероятности  $P=0,98$ .

**Задача 4.4.3.** Измерения массы пищевого продукта дали следующие результаты, г: 205; 203; 212; 200; 209; 202; 210.

Вычислите среднюю массу продукта, проверьте отсутствие промахов и определите вероятность того, что средний результат находится в пределах (206-209) г. Распределение результатов считать нормальным.

**Задача 4.4.4.** В результате измерений индуктивности катушки получены следующие значения, Гн: 6; 6,5; 7; 7,2; 8; 8,4; 8,5; 8,6; 8,8.

Проверьте ряд на отсутствие промахов, вычислите наиболее вероятное значение индуктивности измеряемой катушки, предельную погрешность ряда измерений и погрешность среднего результата.

**Задача 4.4.5.** Произведены дистанционные измерения скорости автомобиля, результаты которых представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Результаты измерений скорости автомобиля

Скорость, км/ч	65	70	78	80	82	90
Число значений $m_i$	1	15	18	25	30	1

Проверьте, содержат ли результаты измерений грубые погрешности. Найдите точечную и интервальную оценки результата измерений скорости при доверительной вероятности  $P=0,96$ .

**Задача 4.4.6.** Определите по критерию Романовского, имеются ли в ряду результатов измерений угловой скорости грубые погрешности. Вычислите доверительную погрешность результата измерений с доверительной вероятностью  $P=0,9$ .

Результаты измерений, об/с: 3,5; 5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 3; 4,5; 5; 6,5; 6; 4,5; 4; 5.

**Задача 4.4.7.** Проверьте ряд результатов измерений толщины диэлектрика (табл. 4.4) на наличие грубых погрешностей, используя критическое значение квантили  $t_{\tau}$  с доверительной вероятностью  $P=0,98$ . Вычислите точечные характеристики измеренного параметра.

Таблица 4.4

Результаты измерений толщины диэлектрика

Толщина диэлектрика, мм	14	14,5	14,8	15,5	15,7	16,0	16,2	16,4
Число результатов измерений $m_i$	2	6	12	24	30	20	16	1

**Задача 4.4.8.** Используя критерий Шарлье, проверьте на отсутствие грубых погрешностей ряд результатов измерений расхода холодной воды, представленный в интервальной форме в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Результаты измерений расхода холодной воды

Интервалы, л/час	6; 8	8; 10	10; 12	12; 14	14; 16	16; 18
Число результатов измерений $m_i$	1	10	15	18	8	1

Оцените результат измерений с доверительной вероятностью  $P=0,95$ .

**Задача 4.4.9.** С помощью критерия Диксона проверьте, не содержат ли результаты измерений расстояния грубые погрешности, при уровне значимости  $q=0,02$ . Результаты измерений, м: 620; 750; 690; 700; 710; 800; 600; 650; 720.

Определите точность измерений с помощью СКО результатов.

**Задача 4.4.10.** Результаты определения процентного содержания марганца в образцах стали выпускаемой марки представлены в таблице 4.6. Проверьте экспериментальные данные на отсутствие промахов при уровне значимости 0,05, вычислите точечные характеристики результата измерений.

Таблица 4.6

Процентное содержание марганца в отливках

Отливка №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
% Mn	1,20	1,08	1,01	1,46	1,33	1,14	1,17	1,25	1,04	1,06	1,18	1,11	1,00	1,24	1,09	1,03	1,50

**Задача 4.4.11.** Результаты определения температуры ( $^{\circ}\text{F}$ ) сгорания образцов керамических покрытий: 1430; 1520; 1460; 1470; 1510; 1480; 1320; 1460; 1500; 1450. Проверьте ряд на отсутствие промахов и определите доверительный интервал температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) для доверительной вероятности 95%.

**Задача 4.4.12.** При сравнении скорости работы двух контролеров определялось время измерения параметра деталей (таблица 4.7). Проверьте ряды на отсутствие промахов и определите с вероятностью 0,98, какой контролёр работает быстрее.

Таблица 4.7

Время измерений параметра контролёрами, мин

Контролёр1	14	20	11	12	18	12	15	22	24	16	16	19	13	16	20	28	21	16	17	17
Контролёр2	17	18	26	22	11	12	15	14	24	21	26	19	25	27	13	12	18	19	19	14

**Задача 4.4.13.** Нароботка серийно выпускаемых электронных блоков до отказа при испытаниях на надёжность приведена в табл. 4.8. Определите, нет ли грубых погрешностей в результатах испытаний, рассчитайте среднюю наработку и погрешность её определения с вероятностью 0,96.

Таблица 4.8

Нароботка до отказа электронных блоков

Время наработки, ч	550	610	580	670	565	500	620	660	540	572	820
Количество блоков $m_i$	9	40	32	4	18	2	20	7	10	24	1

**Задача 4.4.14.** Для ряда результатов измерений отклонений от круглости проверьте наличие промахов, пользуясь критериями Романовского и Диксона с уровнем значимости 0,02.

Результаты измерений отклонений от круглости, мкм: 4; 6; 2; 12; 10; 15; 18; 6; 11; 12; 4; 5; 3; 10; 12; 8; 16; 10; 28; 0.

**Задача 4.4.15.** Для прорастания семян огурцов и дынь в теплице нужно поддерживать температуру  $(32 \pm 1)^\circ\text{C}$  и относительную влажность  $(90 \pm 1)\%$ . Выполняются ли эти требования, если показания термометров психрометра дали значения, приведенные в таблице 4.9. Проверьте ряды значений на отсутствие промахов.

Таблица 4.9

Показания термометров психрометра,  $^\circ\text{C}$

Влажный термометр	25,0	29,4	23	28,2	30,0	29,5	26,5	28,3	29,0	28,6	29,8	27,4	29,2	28,8	28,4	29,6	30,0	29,0
Сухой термометр	29,0	31,0	27,2	30,0	32,0	30,5	29,0	30,1	30,4	29,8	30,9	29,1	31,1	29,2	28,9	33,0	33,2	30,1

**Задача 4.4.16.** Измерения тормозного пути легкового автомобиля дали следующие результаты, м: 6,5; 7,0; 8,2; 3,0; 7,4; 9,6; 14; 10,3; 9,2; 7,8; 8,4; 9,8. Точность измерений  $0,583 \text{ м}^{-1}$ .

Пользуясь правилом «трёх сигм», определите наличие промахов в экспериментальных данных.

**Задача 4.4.17.** Зная доверительную погрешность результатов измерений  $\varepsilon = 0,66$  и СКО  $\delta = 1,015$ , определите предельно допустимое значение квантиля для применения критерия Романовского. Число результатов измерений 16.

**Задача 4.4.18.** Определите предельно допустимое значение квантили для 100 измерений при доверительной вероятности  $P=0,98$ .

**Задача 4.4.19.** Определите значение коэффициента Шарлье, если известны доверительная погрешность  $\varepsilon = 0,31$  при доверительной вероятности 0,99 и СКО  $S=1,2$ .

**Задача 4.4.20.** Определите доверительную погрешность измерения напряжения, если при проверке наличия промахов значение критерия Романовского  $t_T = 2,616$  и точность измерений равна  $1,25 \text{ В}^{-1}$ .

**Задача 4.4.21.** Определите размах результатов 16-ти измерений с доверительной вероятностью  $P=0,95$ , если расчетное значение критерия Диксона равно табличному значению и разность двух последних значений вариационного ряда результатов измерений равна 0,01.

**Задача 4.4.22.** Определите проверяемое значение в ряду измерений, СКО которых 1,6 мА, если отклонение этого значения от среднего, равного 10 мА, превышает предельно допустимое значение для критерия Шарлье на 0,02 мА.

**Задача 4.4.23.** Определите проверяемое значение вариационного ряда из 12 результатов измерений электрического сопротивления, проведенных с СКО 2,6 Ом и доверительной вероятностью 0,95, если среднее значение сопротивления 50,45 Ом, и превышение значения критерия Романовского равно 0,14 Ом.

**Задача 4.4.24.** Определите числовые характеристики результатов 10 измерений (среднее значение и СКО) угловой скорости, проведенных с доверительной вероятностью 0,99, если для проверяемого значения 3,87 об/с превышение предельно допустимого значения по критерию Шарлье – 0,04.

**Задача 4.4.25.** Определите наибольшее значение и СКО результатов 30 измерений температуры в сушильном шкафу, проведенных при доверительной вероятности 0,95, если среднее значение равно 110,5 °С, предпоследнее значение в вариационном ряду 111,2 °С, размах результатов измерений 5,5 °С. При проверке наибольшего значения по критериям Романовского и Диксона превысили предельно допустимые значения на 0,02.

**Задача 4.4.26.** На сколько нужно изменить требования к доверительной погрешности, чтобы при доверительной вероятности 0,95, доверительным интервалом (62,80; 65,32) км/ч, полученным по результатам 18 измерений, результат измерений скорости 72 км/ч не считался промахом по критерию Романовского?

**Задача 4.4.27.** Определите доверительную вероятность и доверительную погрешность для результатов 150 измерений индуктивности, проведенных с СКО 2,28 Гн, если при проверке отклонения значения 20,47 Гн от среднего значения 16,08 Гн значение квантили превысило предельно допустимое на 0,05.

**Задача 4.4.28.** Определите доверительную погрешность и число измерений расхода жидкости, если при обработке результатов измерений ( $n > 100$ ) получены следующие значения характеристик: среднее арифметическое значение  $\bar{X} = 50,64$  л/ч, СКО  $S = 4,32$  л/ч, доверительная погрешность  $\varepsilon = 1,08$  л/ч; а при проверке промахов квантиль для значения  $x_1 = 61,71$  л/ч оказался равным предельно допустимому значению.

**Задача 4.4.29.** Определите 2 последних значения в вариационном ряду 14 результатов измерений ёмкости, проведенных при доверительной вероятности  $P=0,90$ , если получены следующие статистические характеристики:  $\bar{X} = 62,84$  мФ, СКО  $S=1,02$  мФ, размах  $R=5,24$  мФ, а при проверке промахов предельно допустимые значения критериев Романовского и Диксона превышены на 0,12 мФ.

**Задача 4.4.30.** Определите точность измерений времени, если известно, что результаты 30 измерений распределены по нормальному закону, доверительная вероятность 0,98, и при проверке наибольшего значения расчётное значение критерия Диксона меньше предельно допустимого на 0,01. При этом разность 2-х последних значений вариационного ряда составляет 0,9 мин.

## 5. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

### 5.1 Основные положения

Погрешность результата измерения – это отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины.

Истинное значение величины неизвестно, его применяют только в теоретических исследованиях. На практике используют действительное значение величины  $x_d$ . Тогда погрешность измерения  $\Delta x_{\text{изм}}$  определяется по формуле:

$$\Delta x_{\text{изм}} = x_{\text{изм}} - x_d \quad (5.1)$$

где  $x_{\text{изм}}$  – измеренное значение величины.

По способу выражения погрешности измерений можно разделить на абсолютные и относительные. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины и определяется по формуле (5.1).

Относительная погрешность выражается отношением абсолютной погрешности измерения к действительному или измеренному значению измеряемой величины. Относительную погрешность в долях или процентах находят из отношений:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x}; \quad \delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% \quad (5.2)$$

где  $\Delta x$  – абсолютная погрешность измерений;

$x$  – действительное или измеренное значение величины.

По характеру проявления погрешности делятся на систематические и случайные. Систематическая погрешность измерения – это составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины. В зависимости от характера изменения систематические погрешности подразделяют на постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону. Систематиче-

ские погрешности должны быть определены и исключены из результатов измерений введением поправки – величины, равной по абсолютному значению систематической погрешности и противоположной ей по знаку.

Случайная погрешность измерения – это составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же физической величины.

Характеристиками систематических погрешностей являются: значение (для постоянной погрешности), функция определения (для переменной погрешности).

Случайные погрешности можно описать:

- вероятностными характеристиками;
- распределением (плотностью распределения) вероятностей (раздел 3.1.1);
- числовыми (точечными) характеристиками (раздел 3.1.2);
- интервальной характеристикой.

Доверительная погрешность при нормальном распределении:

$$\varepsilon = \pm t_p \cdot S \quad (5.3)$$

В общем случае доверительный интервал для СКО случайной погрешности можно оценить по  $\chi^2$ -распределению (приложение Е):

$$\frac{\sqrt{n-1}}{\chi_H} \cdot S < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_d} \cdot S \quad (5.4)$$

где  $S$  – выборочное СКО;

$\chi_H^2$  – значение по  $\chi^2$ -распределению для уровня значимости

$$q_n = \frac{1-P}{2},$$

где  $P$  – доверительная вероятность;

$\chi^2_{\text{в}}$  – значение по  $\chi^2$ - распределению для уровня значимости

$$q_{\varepsilon} = \frac{1 + P}{2}$$

### 5.2. Вопросы для самопроверки

1. Что называется погрешностью результата измерения?
2. Какое значение принимают за истинное при измерениях:  
а) однократном; б) многократном?
3. Дайте определение погрешности: а) абсолютной; б) относительной; в) систематической; г) случайной.
4. Какими могут быть систематические погрешности по характеру изменения во времени?
5. Какими характеристиками можно описать случайные погрешности?

### 5.3. Примеры решения задач

**Задача 5.3.1.** Показания амперметра, определенные через одинаковые интервалы времени, равны 2,0; 2,2; 2,4; 2,6 А. Действительное значение силы тока 1,9 А. Определите систематическую составляющую погрешности и закономерность ее изменения, полагая, что случайная погрешность пренебрежимо мала.

Решение.

Абсолютные значения систематической погрешности:

$$\Delta I_1 = 2,0 - 1,9 = 0,1 \text{ (А)}$$

$$\Delta I_2 = 2,2 - 1,9 = 0,3 \text{ (А)}$$

$$\Delta I_3 = 2,4 - 1,9 = 0,5 \text{ (А)}$$

$$\Delta I_4 = 2,6 - 1,9 = 0,7 \text{ (А)}$$

Систематическая погрешность является прогрессивной, так как увеличивается с течением времени.

**Задача 5.3.2.** В электрическую цепь, состоящую из источника напряжения  $E=12$  В с внутренним сопротивлением  $R_{\text{в}}=2$  Ом, включенного последовательно резистора сопротивлением  $R=20$  Ом, подключен амперметр с внутренним сопротивлением

$R_A=0,2$  Ом. Определите относительную систематическую погрешность  $\delta$  измерения тока, вызванную сопротивлением амперметра.

Решение.

При последовательном соединении сила тока в цепи:

$$I_1 = \frac{E}{R + R_B + R_A} \quad (5.5)$$

Если не учитывать сопротивление амперметра, то сила тока равна:

$$I_2 = \frac{E}{R + R_B} \quad (5.6)$$

Относительная погрешность:

$$\delta = \frac{I_1 - I_2}{I_2} \cdot 100\% \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\frac{E}{R + R_B + R_A} - \frac{E}{R + R_B}}{\frac{E}{R + R_B}} = \frac{(R + R_B) \cdot (-R_A)}{(R + R_B + R_A)(R + R_B)} \cdot 100\% = \\ &= -\frac{R_A}{R + R_B + R_A} \cdot 100\% \end{aligned} \quad (5.8)$$

Подставив числовые значения, получим:

$$\delta = -\frac{0,2}{20 + 2 + 0,2} \cdot 100\% = 0,9\%$$

**Задача 5.3.3.** Измеренные значения величин А и В соответственно равны:

$$\begin{aligned} A_{ИЗМ} &= A + A \cdot \frac{a}{100} = A \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right), \\ B_{ИЗМ} &= B + B \cdot \frac{b}{100} = B \cdot \left(1 + \frac{b}{100}\right) \end{aligned}$$

где  $A, B$  – действительные значения измеряемых величин;  
 $a, b$  – погрешности измерения, %, величин  $A$  и  $B$ .

Определите относительную погрешность  $\delta_C$  величины  $C$ , которая определяется косвенно:  $C = A \cdot B$

Решение.

В соответствии с формулой (5.2) относительная погрешность измерения величины  $C$ :

$$\begin{aligned} \delta_C &= \frac{A_{IBM} \cdot B_{IBM} - A \cdot B}{A \cdot B} = \frac{A \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot B \cdot \left(1 + \frac{b}{100}\right) - A \cdot B}{A \cdot B} \cdot 100\% = \\ &= \frac{A \cdot B \left[ \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right) - 1 \right]}{A \cdot B} \cdot 100\% = \\ &= \left( 1 + \frac{b}{100} + \frac{a}{100} + \frac{ab}{100 \cdot 100} - 1 \right) \cdot 100\% = \left( a + b + \frac{ab}{100} \right) \% \end{aligned}$$

#### 5.4. Задачи

**Задача 5.4.1.** При измерении температуры получено показание  $t=60,5$  °С. Затем в показание внесена поправка  $+0,1$  °С. Определите значения погрешности измерений и погрешности средства измерений, если действительное значение температуры  $t_d=60,55$  °С.

**Задача 5.4.2.** Частота генератора, равная резонансной частоте колебательного контура, измеряется частотомером, подключенным параллельно контуру. Определите систематическую погрешность измерения частоты генератора, вызванную шунтирующим действием входной емкости частотомера  $C_{вх}$ .

**Задача 5.4.3.** Прогрессивная систематическая погрешность полностью определяет систематическую погрешность омметра. Определите межповерочный интервал при допустимой систематической погрешности  $\Delta=10$  мА, если коэффициент старения  $k_c=27,51 \cdot 10^{-6}$  А/сут.

**Задача 5.4.4.** Определите относительную погрешность измерения напряжения переменного тока вольтметром при разных положениях переключателя рода работы на постоянном и переменном токах, если прибор показывает в первом случае 36,8 В, во втором 34 В при напряжении 36 В.

**Задача 5.4.5.** Вычислите относительную погрешность показаний вольтметра, включенного по схеме, показанной на рисунке 5.1, которая получается из-за допущения, что вольтметр имеет бесконечно большое сопротивление и не вносит искажений в измеряемую цепь.

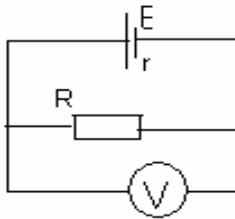


Рис. 5.1. Схема измеряемой цепи

**Задача 5.4.6.** В цепь с сопротивлением  $R=20$  Ом и источником тока с  $E=6$  В и внутренним сопротивлением  $R_{вн}=0,5$  Ом включен амперметр с сопротивлением  $R_A=1$  Ом. Определите показания амперметра и относительную погрешность показаний, вызванную тем, что амперметр имеет сопротивление, отличное от нуля.

**Задача 5.4.7.** Определите относительную систематическую погрешность, возникающую при измерении силы тока амперметром с сопротивлением  $R_A=0,1$  Ом. Измеряемая цепь приведена на рис. 5.2.

- $E = 10$  В
- $R_1 = 6$  Ом
- $R_2 = 4$  Ом
- $R = 2$  Ом

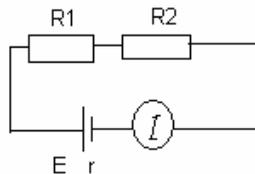
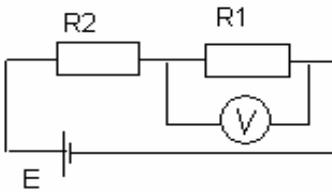


Рис. 5.2. Схема измеряемой цепи

**Задача 5.4.8.** Определите относительную систематическую погрешность измерения разности потенциалов на концах сопротивления  $R_1$  при условии, что сопротивление вольтметра  $R_V=1000$  Ом, а сопротивление амперметра мало и им можно пренебречь. Измеряемая цепь приведена на рисунке 5.3.



$$\begin{aligned} R_1 &= 60 \text{ Ом} \\ R_2 &= 40 \text{ Ом} \\ R_V &= 1000 \text{ Ом} \end{aligned}$$

Рис. 5.3. Схема измеряемой цепи

**Задача 5.4.9.** Температура в печи измеряется образцовым палочным стеклянным термометром, показавшим  $165$  °С, и поверяемой термопарой, которая дала значение  $163,5$  °С. Определите действительное значение температуры в печи, абсолютную и относительную погрешности поверяемой термопары и поправку к ее показаниям.

**Задача 5.4.10.** Определите, какое из средств измерений точнее, если при измерении одного и того же размера первое имеет относительную погрешность, выраженную в долях  $2 \cdot 10^{-3}$ , второе  $3 \cdot 10^{-3}$ .

**Задача 5.4.11** Площадь квадрата определяют как произведение двух его сторон. Каждая сторона измеряется одним и тем же средством измерений. Определите, с какой относительной погрешностью нужно измерять стороны квадрата, чтобы погрешность измерений площади не превышала 1%.

**Задача 5.4.12.** Произведено 10 измерений мощности одним и тем же ваттметром, не имеющим систематической погрешности. СКО  $S=0,8$  Вт. Определите границы погрешности ваттметра с доверительной вероятностью 0,96.

**Задача 5.4.13.** Измеренные значения величин  $A$  и  $B$  соответственно равны:

$$A_{ИЗМ} = A \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right),$$

$$B_{ИЗМ} = B \cdot \left(1 + \frac{b}{100}\right),$$

где  $A, B$  – действительные значения измеряемых величин;  
 $a, b$  – погрешности измерения величин  $A$  и  $B$ , %.

Определите относительную погрешность  $\delta_c$  измерения величины  $C$ , которая определяется косвенно:

а)  $C = \frac{A}{B}$

б)  $C = A^n$

в)  $C = A^m \cdot B^n$

г)  $C = A - B$

д)  $C = A + B$

**Задача 5.4.14.** Измерена мощность трехфазного тока двумя ваттметрами. Определите наибольшую относительную погрешность измерения, если стрелка первого ваттметра показала 100 делений и погрешность его не более 0,5%, а стрелка второго ваттметра показала 20 делений и погрешность его не более 1%.

**Задача 5.4.15.** Определите различие в точности методов измерений сопротивления  $R_x$  на основании закона Ома, схемы которых приведены на рисунке 5.4, если показания амперметра  $I$  и вольтметра  $V$  соответственно равны:  $I_1=0,8$  А,  $U_1=6$  В и  $I_2=8$  мА,  $U_2=180$  В.

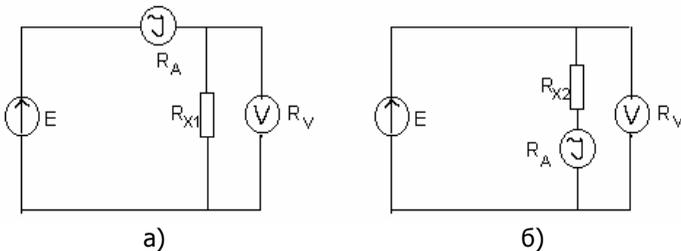


Рис. 5.4. Схемы измерения сопротивления с использованием закона Ома

**Задача 5.4.16.** Определите полную методическую погрешность измерения сопротивления  $R$  по закону Ома по схеме, приведенной на рисунке 5.5, если учесть, что сопротивление амперметра  $R_A=0,09$  Ом, вольтметра  $R_V=950$  Ом.

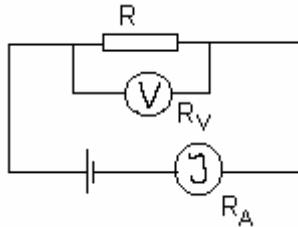


Рис. 5.5. Схема измерения сопротивления с использованием закона Ома

**Задача 5.4.17.** Измерение сопротивления методом вольтметра-ваттметра выполняется по зависимости  $R_x = \frac{U^2}{P}$  и схеме, приведенной на рис. 5.6. Определите методическую погрешность измерения  $R_x$ , если показания приборов  $P=500$  Вт и  $U=200$  В, входное сопротивление вольтметра  $R_V=1000$  Ом. Сопротивлением обмоток ваттметра можно пренебречь.

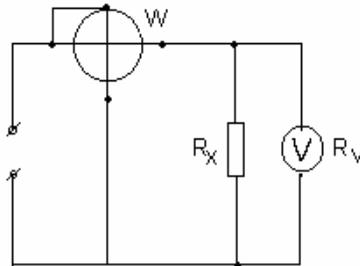


Рис. 5.6. Схема измерения сопротивления методом вольтметра-ваттметра

**Задача 5.4.18.** На равноплечных весах взвешен груз, для которого масса уравновешивающих гирь  $m_1=1,350$  кг. При взвешивании этого груза на другой чашке весов масса уравновешивающих гирь  $m_2=1,335$  кг. Определите массу взвешенного груза и погрешность из-за неравноплечности весов.

**Задача 5.4.19.** Каким должно быть сопротивление вольтметра  $R_V$ , чтобы погрешность измерения падения напряжения на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 5.7) не превышала 3%? Сопротивление источника тока  $r=5$  Ом, сопротивления  $R_1=50$  кОм,  $R_2=200$  кОм.

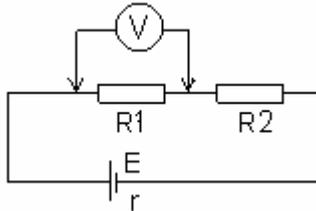


Рис. 5.7. Схема измерения падения напряжения

**Задача 5.4.20.** Погрешность электроизмерительного прибора наряду с другими факторами определяется постоянством его сопротивления. Определите относительное изменение погрешности вольтметра с сопротивлением  $R=200$  Ом, индуктивностью  $L=20$  мГн, если измерения по ошибке произвели в цепях переменного тока с частотой 1 кГц вместо 50 Гц, на которую рассчитан прибор.

**Задача 5.4.21.** Определите интервал измеряемых значений сопротивления  $R_x$ , в пределах которого погрешность измерения сопротивления по схеме, приведенной на рисунке 5.3, не превысит 1,5%, если сопротивление амперметра  $R_A=0,015$  Ом, сопротивление вольтметра  $R_V=3800$  Ом.

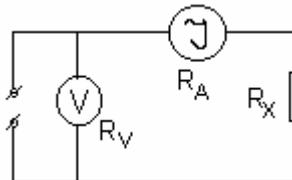


Рис. 5.8. Схема измерения сопротивления

**Задача 5.4.22.** Сопротивление  $R_x$  измеряется косвенно методом амперметра-ваттметра по зависимости  $R=P/I^2$ . Определите методическую погрешность, если показания ваттметра

$P=300$  Вт, амперметра  $I=5$  А, сопротивление амперметра  $R_A=0,5$  Ом. Сопротивление ваттметра можно не учитывать.

**Задача 5.4.23.** Измерительный преобразователь температуры помещен в защитный цилиндрический корпус из железа, диаметр которого  $d=20$  мм и длина  $l=100$  мм, массой 80 г. Определите время установления показаний  $t_{уст}$  при измерении температуры среды  $80$  °С, если допустимая абсолютная погрешность из-за тепловой инерционности  $\Delta(t)=2$  °С.

Удельная теплоемкость «с» железа  $c = 460 \frac{Дж}{кг \cdot К}$ ; ко-

эффициент теплоотдачи поверхности  $15 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}$ .

Абсолютное значение динамической погрешности  $\Delta(t)$  из-за тепловой инерционности преобразователя имеет зависимость:

$$\Delta(t) = T \cdot c \frac{t_{уст}}{a}$$

где  $T$  – измеряемая температура;

$a$  – постоянная времени преобразователя.

**Задача 5.4.24.** Какая постоянная времени должна быть у преобразователя температуры задачи 5.4.23, чтобы через время  $t_{уст}=5$  с выходной сигнал отличался от установившегося значения не более, чем на  $\delta_{уст}=5\%$ ?

**Задача 5.4.25.** Относительная погрешность измерения освещенности не должна превышать 2,5%. По результатам измерений люксметром получили доверительный интервал

$17,22 \text{ лк} \leq X \leq 18,88 \text{ лк}$ . Определите, удовлетворяет ли результат измерений требованиям точности.

**Задача 5.4.26.** Какое предельное значение должна иметь характеристика случайной погрешности (СКО) для результатов 25 измерений ваттметром мощности 650 Вт с доверительной вероятностью 0,99, чтобы погрешность измерений не превысила 1,5%?

**Задача 5.4.27.** Определите относительную погрешность измерения тока миллиамперметром, включенным в цепь сопро-

тивлением  $R=20$  кОм (рисунок 5.9), если емкость между зажимами миллиамперметра и землей  $C_1=C_2=4$  пФ, частота измеряемого тока  $f=1$  МГц.

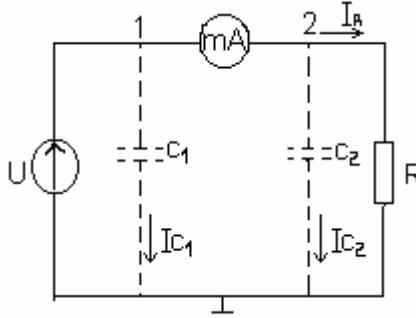


Рис. 5.9. Схема измерения силы тока

**Задача 5.4.28.** Определите входное сопротивление компенсационной цепи в момент компенсации и относительную погрешность измерения при определении напряжения на зажимах источника напряжения  $U_x$  с внутренним сопротивлением  $R_0=40$  Ом (рисунок 5.10). Компенсация напряжения  $U_x$  достигнута при сопротивлении  $R_k=6$  кОм, рабочем токе  $I_p=100$  мкА; постоянная гальванометра по току  $C_I = 2 \cdot 10^{-8}$  А/мм, внутреннее сопротивление  $R_f=2$  кОм; порог чувствительности  $\alpha_0$  равен одному делению.

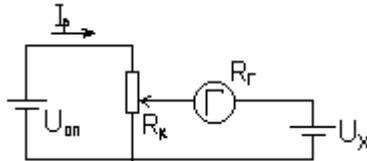


Рис. 5.10. Схема измерения напряжения

**Задача 5.4.29.** Определите относительные погрешности измерения сопротивления  $R_x=2$  Ом методом амперметра-вольтметра по схемам, приведенным на рисунке 5.11, если  $R_A=10$  МОм,  $R_V=40$  кОм.

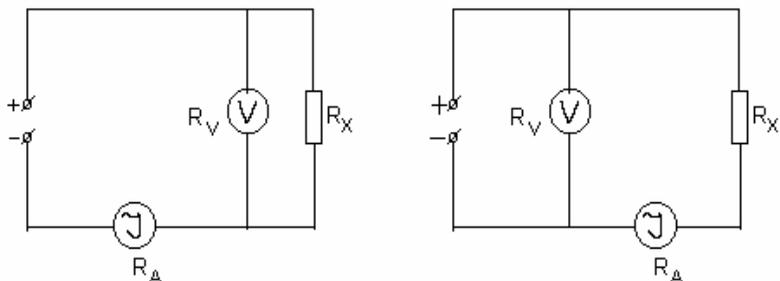


Рис. 5.11. Схемы измерений сопротивления методом амперметра-вольтметра

**Задача 5.4.30.** Определите, какому значению  $R_x$  соответствует состояние баланса моста (рисунок 5.12), если сопротивления плеч моста  $R_2=4$  кОм,  $R_3=2$  кОм,  $R_4=5$  кОм, внутреннее сопротивление гальванометра  $R_f=1$  кОм. ЭДС идеального источника напряжения  $E=6$  В. Какой минимальной чувствительностью по току  $S_I$  должен обладать гальванометр, чтобы можно было измерить сопротивление  $R_x$  с относительной погрешностью 3%?

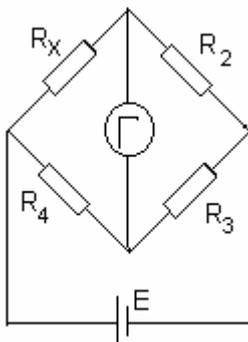


Рис. 5.12. Схема электроизмерительного моста

**Задача 5.4.31.** Определите значения индуктивности  $L_x$  и сопротивления  $R_x$  катушки, если при равновесии моста (рисунок 5.13) получены значения  $R_2=100$  Ом,  $R_3=30$  кОм,  $C_3=1$  мкФ,  $R_4=850$  Ом.

Определите значения погрешности измерения этих величин, если основная погрешность моста задана в виде двух состав-

ляющих аддитивной  $\pm(1+6/L)\%$  и мультипликативной  $\pm(1+6/R)\%$  при измерении на частоте 100 Гц, где  $[L] = \text{мкГн}$ ,  $[R] = \text{Ом}$ .

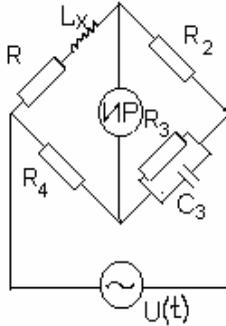


Рис. 5.13. Схема электроизмерительного моста

**Задача 5.4.32.** Определите емкость  $C_x$  и тангенс угла потерь конденсатора  $\text{tg}\delta_x$  с помощью электроизмерительного моста (рисунок 5.14) с параметрами: частота питающего напряжения 1 кГц, сопротивления плеча множителя  $R_2=1 \text{ кОм}$ , плеча отсчета  $R_3=500 \text{ Ом}$ , регулируемое сопротивление  $R_4=10 \text{ Ом}$ , емкость образцового конденсатора  $C_4=0,1 \text{ мкФ}$ .

Определите погрешности измерения  $C_x$  и  $\text{tg}\delta_x$ , если основные погрешности измерения заданы в виде аддитивной и мультипликативной составляющих  $\pm(1+20/C)\%$ ,  $\pm(5 \cdot 10^{-3} + 0,1\text{tg}\delta)$ , где  $[C] = \text{нФ}$ .

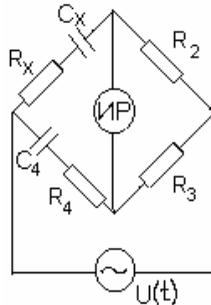


Рис. 5.14. Схема электроизмерительного моста

## 6. КЛАССЫ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 6.1 Основные положения

Класс точности средств измерений – это обобщённая характеристика данного типа средств измерений, как правило, отражающая уровень их точности, выражаемая пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность.

Класс точности может быть представлен в форме:

– абсолютной погрешности, если в данной области измерений принято выражать погрешность в единицах измеряемой величины или в делениях шкалы. Например, для мер массы или длины;

– относительной погрешности, если погрешности нельзя полагать постоянными в пределах диапазона измерений;

– приведённой погрешности, если границы погрешностей можно полагать практически неизменными в пределах диапазона измерений.

Если класс точности представлен в виде абсолютной погрешности с практически неизменными границами вида:

$$\Delta_n = \pm a, \quad (6.1)$$

где  $a = \text{const}$ ,

то он обозначается заглавными буквами латинского алфавита или римскими цифрами. При этом должна быть приведена таблица соответствия обозначения значению погрешности. Чем больше цифра или дальше от начала алфавита буква, тем большее значение погрешности они обозначают.

Класс точности обозначается числом в кружке, например

, если он установлен по относительной погрешности с постоянными границами:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{x_n} = \pm q, \%, \quad (6.2)$$

где  $x_n$  – измеряемая величина;

\* $q = \text{const}$ .

Класс точности обозначается двумя числами через косую черту, например 0,03/0,02, если он установлен по относительной погрешности, определённой по линейно изменяющейся абсолютной погрешности. Абсолютная погрешность имеет вид:

$$\Delta_n = \pm (a + bx_n), \quad (6.3)$$

где  $a, b$  – постоянные коэффициенты.

Тогда относительная погрешность:

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{\Delta_n}{x_n} = \pm \frac{a + bx_n}{x_n} = \pm \left( b + \frac{a}{x_n} \right) = \\ &\pm \left[ \left( b + \frac{a}{|X_k|} \right) - \frac{a}{|X_k|} + \frac{a}{x_n} \right] = \pm \left[ \left( b + \frac{a}{|X_k|} \right) + \frac{a}{|X_k|} \left( \frac{|X_k|}{x_n} - 1 \right) \right] = \\ &= \pm \left[ c + d \left( \frac{|X_k|}{x_n} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $*c = b + d$ ;

$$*d = \frac{a}{|X_k|};$$

$X_k$  – больший (по модулю) из пределов измерений.

Класс точности обозначается числом без символов, если определён по приведённой погрешности:

$$\gamma = \frac{\Delta_n}{X_N} = \pm p, \%, \quad (6.5)$$

где  $X_N$  – нормирующее значение шкалы средства измерений;

$*p = \text{const.}$

---

\*С целью ограничения номенклатуры средств измерений по точности число устанавливаемых классов точности для конкретных групп средств измерений ограничивается, а расчётные величины  $q, c, d, p$  округляются до значения, ближайшего большего по ряду:

$1 \cdot 10^n; 1,5 \cdot 10^n; (1,6 \cdot 10^n); 2 \cdot 10^n; 2,5 \cdot 10^n; (3 \cdot 10^n); 4 \cdot 10^n; 5 \cdot 10^n; 6 \cdot 10^n,$

где  $n=1; 0; -1; -2$  и т.д.

За нормирующее значение чаще всего принимают диапазон измерений. Если средство измерений предназначено для контроля отклонения величины от номинального значения, то это значение принимают в качестве  $X_N$ .

Класс точности обозначается с символом  $\nabla$ , например 1,5  $\nabla$ , если шкала средства измерений нелинейная (гиперболическая, логарифмическая и т.д.), и за нормирующее значение  $X_N$  принимается длина шкалы.

## 6.2. Вопросы для самопроверки

1. Что определяет класс точности средства измерений?
2. При каких условиях класс точности определяется по погрешности: а) абсолютной; б) относительной; в) приведенной?
3. Как обозначается класс точности, установленный по погрешности: а) абсолютной; б) относительной; в) приведенной?
4. Как устанавливается числовое значение класса точности?
5. Как устанавливается и обозначается класс точности при линейно изменяющейся абсолютной погрешности?

## 6.3. Примеры решения задач

**Задача 6.3.1.** Измерена термо-ЭДС потенциометром класса точности 0,5 со шкалой от 200 до 600 °С. Указатель стоит на отметке 400 °С. Определите наибольшую относительную погрешность измерения, если измерение проведено при нормальных условиях.

Решение.

Судя по обозначению, класс точности определён по приведённой погрешности для линейной шкалы, т.е. по формуле (6.5):

$$\gamma = \frac{\Delta_n}{X_N} \cdot 100\%,$$

где  $X_N = 600 - 200 = 400$  °С.

Тогда 
$$\Delta_n = \frac{\gamma \cdot X_N}{100\%} \quad (6.6)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{x_n} \cdot 100\% = \frac{\gamma \cdot X_N}{100\% \cdot x_n} \cdot 100\% = \frac{\gamma \cdot X_N}{x_n} \quad (6.7)$$

$$\delta_n = \frac{0,5 \cdot 400}{400} = 0,5\%$$

**Задача 6.3.2.** Измерения мощности электробытового устройства проводилось методом амперметра–вольтметра. Оба прибора имели класс точности 0,5, работали в нормальных условиях и имели шкалы соответственно (0–10) А и (100–400) В. Измеренные значения силы тока 9 А и напряжение 222 В. Определите погрешность измерения мощности.

Решение.

Так как мощность измерялась косвенно на основании зависимости  $P=I \cdot U$ , то погрешность ее измерения складывается из погрешностей неоднородных величин – силы тока и напряжения. Для их суммирования погрешности должны быть представлены в относительной форме. Относительная погрешность измерения мощности:

$$\delta_p = \sqrt{\delta_I^2 + \delta_U^2}, \quad (6.8)$$

где  $\delta_I$  и  $\delta_U$  – относительные погрешности измерения силы тока и напряжения.

Эти погрешности можно определить по формуле (6.7):

– при измерении силы тока:

$$\delta_I = \frac{0,5 \cdot 10}{222} \approx 0,56\%;$$

– при измерении напряжения:

$$\delta_U = \frac{0,5 \cdot 300}{222} \approx 0,68\%.$$

Определяем погрешность измерения мощности:

$$\delta_p = \sqrt{0,56^2 + 0,68^2} = \sqrt{0,776} \approx 0,88\%.$$

**Задача 6.3.3.** В результате поверки амперметра в контролируемых точках шкалы: 1–2–3–4–5 А получены следующие показания:

- при увеличении силы тока 1,1–2,3–2,9–3,8–4,7 А;
- при уменьшении силы тока 4,7–3,9–2,8–2,1–1,2 А.

Определите абсолютную, относительную, приведённую погрешности, вариацию показаний и класс точности амперметра.

Решение.

Определяем абсолютные погрешности показаний в контролируемых точках шкалы амперметра по формуле (5.1): +0,1 А – +0,3 А – 0,1 А – 0,2 А – 0,3 А – 0,1 А – 0,2 А – +0,1 А – +0,2 А.

Выбираем наибольшее (по модулю) значение погрешности. Абсолютная погрешность амперметра  $\Delta_n = 0,3$  А.

Относительная погрешность по формуле (6,2):

$$10\% - 15\% - 3\% - 5\% - 6\% - 2,5\% - 6,7\% - 5\% - 20\%.$$

Наибольшее значение относительной погрешности показаний:  $\delta_n = 20\%$ .

Приведённая погрешность по формуле (6.5):

$$\gamma = \frac{0,3}{5} \cdot 100\% = 6\%.$$

По стандартному ряду значению приведённой погрешности соответствует 6–й класс точности. Но на электроизмерительные приборы такой грубый класс не назначается.

**Задача 6.3.4.** Для измерения напряжения применяются два вольтметра:

$X_{N_1} = 50$  В, класс точности  $K_1 = 2,5$ ;  $X_{N_2} = 150$  В, класс точности  $K_2 = 1,0$ .

Определите, какой вольтметр точнее, если первый показал 40,2 В, а второй 42 В.

Решение.

Для конкретного измеренного значения сравниваем относительные погрешности вольтметров, рассчитанные по формуле (6.7):

$$\delta_1 = \frac{2,5 \cdot 50}{40,2} = 3,1\%; \delta_2 = \frac{1,0 \cdot 150}{42} = 3,57\%.$$

Так как  $\delta_2 > \delta_1$ , то первый вольтметр точнее.

## 6.4. Задачи

**Задача 6.4.1.** При калибровке технического термометра со шкалой (0–300) °С был использован лабораторный термометр, имеющий поправку по свидетельству о поверке –1,5 °С. Поправка на выступающий столбик + 0,5 °С. Измерения температуры в термостатике дали следующие результаты: техническим термометром 249 °С; лабораторным термометром 253 °С.

Определите, выходит ли за пределы допускаемой основной погрешности  $\pm 2\%$  действительное значение погрешности показаний технического термометра. Какой класс точности можно присвоить техническому термометру по его действительной погрешности?

**Задача 6.4.2.** Показания омметра на поддиапазоне от 0 до  $10^3$  Ом составили 152,8 Ом. Действительное значение сопротивления 150 Ом. Определите абсолютную, относительную погрешности и класс точности прибора по приведённой погрешности.

**Задача 6.4.3.** По результатам поверки вольтметра методом непосредственного сравнения с эталонным вольтметром определите наибольшую относительную погрешность, вариацию показаний и класс точности по приведённой погрешности.

Таблица 6.1

Результаты поверки вольтметра

Контролируемые точки поверяемого прибора, В	2	4	6	8	10	
Показания эталонного вольтметра, В	"ход вверх"	2,03	3,97	6,1	8,2	9,9
	"ход вниз"	1,98	4,01	6,05	8,03	9,95

**Задача 6.4.4** Определите относительную погрешность измерения напряжения, если показание вольтметра класса точности 1,5 с пределом измерения 400 В составило 129 В.

**Задача 6.4.5.** Три амперметра включены в электрическую цепь силой тока 20 А. Первый амперметр имеет пределы измерений (0–25) А и класс точности 2,5; второй амперметр – с пределами измерений (5–40) А и классом точности 2; третий амперметр – с пределами измерений (10–50) А и классом точности 1,5. Определите, какой из приборов обеспечит большую точность измерения силы тока в цепи.

**Задача 6.4.6.** Оцените погрешность измерений мощности, если сопротивление измерено с погрешностью 1%, а показания вольтметра класса точности 1,5 составили  $\frac{2}{3}$  длины шкалы.

**Задача 6.4.7.** Вольтметр на напряжение (0–130) В подключён к трансформатору напряжения 1000/100. Определите напряжение электрической сети, если вольтметр показал 90 В и оцените погрешность измерения напряжения, если класс точности прибора 2, а трансформатора 1,5.

**Задача 6.4.8.** При определении затрат энергии в электрической печи за сутки были измерены: напряжение в электрической сети 222 В вольтметром классом точности 1,5 со шкалой (0–300) В, сила тока 110 А амперметром со шкалой (0–150) А класса точности 1,0, время часами, имеющими погрешность 1,5%. Определите значение энергии, абсолютную и относительную погрешности её измерения.

**Задача 6.4.9.** При поверке дистанционного парогазового термометра класса точности 2 с пределами измерений от 0 до 160 °С были получены показания эталонного ртутного термометра в контролируемых точках шкалы (табл. 6.2). Определите годность прибора.

Таблица 6.2

Результаты поверки термометра

Контролируемые точки шкалы, °С.	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Показания эталона при повышении температуры, °С	0,1	22	40	63	78	96	123	141	159
Показания эталона при понижении температуры, °С	0,2	21	42	60	79	98	122	140	158

**Задача 6.4.10.** Определите класс точности амперметра по относительной погрешности, если он в цепи с эталонным сопротивлением 5 Ом показал ток 5 А, а при замене прибора эталонным амперметром для получения тех же показаний пришлось уменьшить напряжение на 1 В.

**Задача 6.4.11.** Определите погрешность измерения сопротивления цепи методом амперметра и вольтметра, если ам-

перметр имеет диапазон измерений (0–50) мА и класс точности 2, а вольтметр – диапазон измерений (0–30) В и класс точности 1,5. Показания приборов соответственно равны 40 мА и 12 В.

**Задача 6.4.12.** Определите диапазон измерений ваттметра 4-го класса точности, имеющего наибольшую абсолютную погрешность 40 Вт.

**Задача 6.4.13.** Определите класс точности по приведённой погрешности манометра с диапазоном измерений 600 кПа, если при измерении давления 1 атм получена относительная погрешность 3,8 %.

**Задача 6.4.14.** Выберите средства измерений для косвенного определения электрической энергии, метрологические характеристики которых приведены в таблице 6.3, чтобы погрешность измерений энергий не превышала 5 % при показаниях приборов 0,6 А; 25 В; 10 мин. Большой запас точности не рекомендуется.

Таблица 6.3  
Метрологические характеристики средств измерений

Наименование Мет рологи- ческие характеристики	Амперметры			Вольтметры			Секундомеры		
	A1	A2	A3	V1	V2	V3	T1	T2	T3
1.Пределы измерений	0-1000 мА	0-10 А	0-20 А	5-40 В	0-30 В	10-50 В	0-30 мин.	0-60 мин.	0-120 мин.
2.Класс точности по приведённой погрешности	1	0,5	0,3	2	4	0,4	1	1	0,5

**Задача 6.4.15.** Определите класс точности миллиамперметра с конечным значением шкалы 0,5 мА для измерения тока в диапазоне  $0,1 \div 0,5$  мА так, чтобы относительная погрешность измерения не превышала 2,5%.

**Задача 6.4.16.** Определите, в каком случае абсолютная погрешность измерения тока  $I=20$  мА меньше, если для измерения использованы два прибора, имеющие соответственно шкалы на 30 мА (класс точности 0,5) и 100 мА (класс точности 0,2).

**Задача 6.4.17.** Определите возможные пределы показаний двух миллиамперметров с пределами измерений (0-100) мА классом точности 1,0 и 0,5 при измерении тока, действительное значение которого 50 мА.

**Задача 6.4.18.** Определите класс точности амперметра с пределом измерений 10 А, поверенного с помощью компенсатора постоянного тока, если поверка дала результаты, указанные в табл. 6.4.

Таблица 6.4

Результаты поверки

Значения проверяемых точек шкалы, А	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Значения токов, измеренные компенсатором, А	0,2048	0,3976	0,6010	0,8051	0,9979

**Задача 6.4.19.** Определите абсолютную  $\Delta U$  и относительную  $\delta_u$  погрешность измерения напряжения в цепи (рис. 6.1), если показания вольтметров с пределами измерений (0-150) В, класса точности 2 составили  $U_1 = 80$  В,  $U_2 = 45$  В.

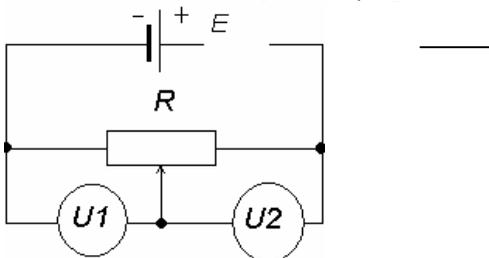


Рис. 6.1. Схема измерительной цепи

**Задача 6.4.20.** Рассчитайте межповерочный интервал для термопары класса точности 4 и пределами измерений (100-500) °С, если её погрешность полностью определяется прогрессирующей погрешностью  $K_n = 22 \cdot 10^{-3}$  °С/сут.

**Задача 6.4.21.** Определите класс точности электроиндуктивной измерительной системы по относительной погрешности, если пределы показаний  $(-100 \div 300)$  мкм, измеренное значение 120 мкм, а абсолютная погрешность  $\Delta$  изменяется по зависимости  $\Delta = 2,05 + 0,008 \cdot x$ , где  $x$  – измеряемое отклонение от настроенного размера.

**Задача 6.4.22.** Класс точности тензометрического моста 0,009/0,004, предел измерения 500 мкм. Определите относительную и абсолютную погрешности измерения деформации 50 мкм.

**Задача 6.4.23.** Определите класс точности по наибольшей приведённой погрешности лазерного измерителя скорости с пределами измерений  $(20-250)$  км/ч и абсолютной погрешностью, имеющей вид  $\Delta = 5 - 0,006 \cdot x$ .

**Задача 6.4.24.** Определите, по какому значению измеряемой величины был установлен класс точности расходомера жидкостей, равный 0,02/0,03, если предел измерений расхода 150 л/ч, и относительная погрешность составила 5%.

**Задача 6.4.25.** Определите класс точности СИ по относительной погрешности, если известно, что абсолютная погрешность имеет линейную зависимость от измеряемой величины, и при поверке получены результаты, представленные в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Результаты поверки СИ

Значение поверяемой точки шкалы СИ $x$ , мкм	10	20	30	40	50	60	70	80
Погрешность показаний СИ $\Delta$ , мкм	0,4	0,5	0,8	1	1,1	1,3	1,5	2

**Задача 6.4.26.** Для средств измерений массы принято выражать погрешность в абсолютной форме. В результате поверки ошибочно весам присвоили классы точности по приведённой погрешности (таблица 6.6). Исправьте эту ошибку и приведите таблицу соответствия буквенного обозначения значению погрешности.

Таблица 6.6.

## Классы точности поверенных весов

Обозначение СИ	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Пределы измерений СИ, г	0-500	0-1000	0-2000	0-5000	0-10000	500-10000
Классы точности по приведённой погрешности	0,2	0,5	0,4	0,2	0,6	1

**Задача 6.4.27.** Измерительная система имеет аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности. Определите класс точности по относительной погрешности, если аддитивная составляющая равна 2 мкм, мультипликативная – 0,001, наибольший предел измерений – 200 мм.

**Задача 6.4.28.** Определите класс точности амперметра с током полного отклонения  $I_A = 5$  мА и внутренним сопротивлением  $R_A = 5$  Ом, после введения шунта сопротивлением  $R_{ш} = 15$  Ом, если до введения шунта его приведённая погрешность  $\gamma$  была 5 %. Погрешностью шунта можно пренебречь.

**Задача 6.4.29.** Определите класс точности амперметра с током полного отклонения  $I_A = 50$  мА и внутренним сопротивлением  $R_A = 10$  Ом после введения шунта сопротивлением  $R_{ш} = 101$  мОм и абсолютной погрешностью  $\Delta_{ш} = 5$  мОм, учитывая, что наибольшая погрешность амперметра наблюдается в конце шкалы. До введения шунта абсолютная погрешность амперметра  $\gamma = 4$  %.

**Задача 6.4.30.** Определите класс точности по относительной погрешности амперметра с током полного отклонения  $I_A = 200$  мА и внутренним сопротивлением  $R_A = 10$  Ом после введения шунта сопротивлением  $R_{ш} = 0,2$  Ом, если собственная погрешность амперметра изменяется по закону  $\Delta = 4-0,2 \cdot x$ , где  $x$  – измеряемое значение силы тока.

## 7. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

### 7.1. Основные положения

В главе 3 было сказано, что результат каждого отдельного измерения при наличии случайного рассеивания невозможно заранее предсказать. В то же время повторные измерения обнаруживают определённую закономерность, которая достаточно хорошо изучена и математически описывается кривой нормального распределения, показанной на рисунке 3.4 (кривая 2). Параметры этой кривой, наиболее полно характеризующие конечный результат измерений, приведены в главе 3.

Зная общую закономерность распределения данных, можно не только достаточно точно их описать, но и предсказать в целом течение и результат процесса. Достоверность таких выводов будет зависеть от правильности определения теоретического закона распределения, которому подчиняются экспериментальные данные.

Проверку гипотезы о виде эмпирического распределения можно выполнять по критериям Пирсона -  $\chi^2$ , Колмогорова – Смирнова, составному и другим.

Критерий Пирсона -  $\chi^2$  применяется при большом числе экспериментальных данных  $n \geq 50$ . Параметром критерия является значение  $\chi^2$ , учитывающее расхождение эмпирической и теоретической абсолютных частот по интервалам гистограммы:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r (m_i - n \cdot p_i)^2 / n \cdot p_i, \quad (7.1)$$

где  $r$  – число интервалов разбиения гистограммы;

$m_i$  – абсолютная частота в  $i$ -том интервале;

$p_i$  – теоретическая вероятность попадания в  $i$ -тый интервал;

$n$  – общее число экспериментальных данных.

Гипотеза о соответствии нормальному распределению принимается, если выполняется условие:

$$\chi^2 < \chi_q^2, \quad (7.2)$$

где  $\chi_q^2$  – табличное значение по  $\chi^2$ -распределению при уровне значимости  $q$  и числе степеней свободы  $f = r-3$  (приложение  $\varepsilon$ ).

Составной критерий применяется при небольшом числе экспериментальных данных  $n < 50$  и состоит из двух частей. Уровень значимости составного критерия является суммой уровней значимости по обеим его частям:

$$q = q_1 + q_2. \quad (7.3)$$

Гипотеза по составному критерию принимается, если выполняются условия по двум его частям:

- по первой части проверяется общий разброс экспериментальных данных через среднее значение квантили:

$$d_{1-q_{1/2}} \leq d < d_{q_{1/2}}, \quad (7.4)$$

где  $d_{1-q_{1/2}}$  и  $d_{q_{1/2}}$  – предельно допустимые табличные значения (приложение Ж, таблица 1) при уровнях значимости соответственно  $1-q_{1/2}$  и  $q_{1/2}$ :

$$d = \frac{\sum |x_i - \bar{X}|}{n \cdot S^*} \quad (7.5)$$

- по второй части критерия проверяются концы эмпирического распределения: подсчитываются большие отклонения от среднего:

$$|x_i - \bar{X}| > S \cdot t_{p/2} \quad (7.6)$$

где  $t_{p/2}$  – квантиль функции Лапласа для вероятности  $P/2$ .

Значение вероятности  $P$  определяется по приложению Ж, табл. 2 для уровня значимости  $q_2$ .

Вторая часть критерия выполняется, если число больших разностей по условию (7.6) не превышает предельно допустимое значение –  $m$  (приложение Ж, табл. 2).

Критерий Колмогорова – Смирнова позволяет не только определить соответствие эмпирического распределения теоретическому, но и установить, относятся ли две выборки к одной генеральной совокупности. По критерию оценивается наибольшее расхождение эмпирической и теоретической накопленных относительных частот и функции распределения вероятностей:

$$D = \max |F_{\text{э}i} - F_{\text{т}i}|, \quad (7.7)$$

где  $F_{\text{э}i}$  – накопленная относительная частота в  $i$ -том интервале;

$F_{\text{т}i}$  – теоретическая функция распределения вероятностей для  $i$ -го интервала.

По значению  $\lambda$ :

$$\lambda = D \cdot \sqrt{n} \quad (7.8)$$

определяется вероятность  $P(\lambda)$  по приложению 3, с которой можно принять эмпирическое распределение близким к нормальному.

При сопоставлении результатов измерений двух выборок:

$$D = \max |F_1/n_1 - F_2/n_2| \quad (7.9)$$

где  $F_1, F_2$  – накопленные частоты первой и второй выборок;

$n_1, n_2$  – объёмы выборок;

Гипотеза о принадлежности выборок одной генеральной совокупности принимается, если:

$$D < D_p, \quad (7.10)$$

$$\text{где } D_p = \sqrt{-0,5 \cdot \ln(q/2)(1/n_1 + 1/n_2)} \quad (7.11)$$

При условии, что  $n_1 + n_2 > 35$ ;

$q$  – уровень значимости.

Критерий Мизеса – Смирнова  $\Omega^2$  применяют при числе результатов измерений  $50 < n < 200$ . При  $n > 200$  критерий используют, когда проверка по другим критериям не дала однозначного результата. Значение  $\Omega^2$  рассчитывают по формуле:

$$\Omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ (2i-1)/2n \cdot \ln F(x_j) + (1 - [2j-1]/2n) \cdot \ln [1 - F(x_j)] \right\} \quad (7.12)$$

где  $x_j$  – результат измерений, имеющий  $j$ -й номер в вариационном ряду  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ;

$F(x_j)$  – значение функции теоретического распределения при значении аргумента  $x_j$  (приложение Б, табл. 2).

Вычисляют  $\Omega^2$  с точностью до 5 значащих цифр, округляя окончательный результат до двух значащих цифр. По таблице приложения И находят значение функции «а», соответствующей вычисленному значению  $\Omega^2$ . Гипотезу о соответствии эмпирического и нормального теоретического распределений принимают, если выполняется неравенство:

$$a < 1-q \quad (7.13)$$

где q – заданный уровень значимости. Обычно 0,1 или 0,2.

Приближённые методы проверки оценивают соответствие эмпирического и нормального теоретического распределений сравнением числовых характеристик – асимметрии и эксцесса. Для нормального распределения асимметрия  $\mu=0$ , эксцесс  $\nu=3$  (глава 3). Для удобства сравнения используют величину:

$$E = V - 3 = 0 \quad (7.14)$$

Для эмпирического распределения рассчитывают:  
- СКО:

$$S^* = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 / n} ; \quad (7.15)$$

- третий центральный момент:

$$m_3 = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^3 ; \quad (7.16)$$

- четвёртый центральный момент:

$$m_4 = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^4 ; \quad (7.17)$$

- асимметрию:

$$\mu = m_3 / (S^*)^3 \quad (7.18)$$

- коэффициент эксцесса:

$$E = m_4/(S^*)^4 - 3 \quad (7.19)$$

Рассчитанные значения  $\mu$  и  $E$  сравниваются с 0. О малости этих характеристик судят по сравнению с их средними квадратическими погрешностями:

- для асимметрии

$$\mu_{\text{СКП}} = \sqrt{6(n-1)/[(n+1) \cdot (n+3)]} \quad (7.20)$$

- для эксцесса

$$E_{\text{СКП}} = \sqrt{24n(n-2) \cdot (n-3)/[(n-1)^2 \cdot (n+3)(n+5)]} \quad (7.21)$$

Если хотя бы одна из характеристик ( $\mu$  или  $E$ ) по абсолютному значению в 2-3 раза превосходит свою среднюю квадратическую погрешность, то гипотеза о соответствии эмпирического распределения нормальному теоретическому отклоняется.

## 7.2. Вопросы для самопроверки

1. С какой целью определяют соответствие эмпирического распределения нормальному теоретическому закону?
2. Какие критерии используют для проверки гипотезы о виде эмпирического распределения?
3. Когда следует применять критерий: а) Пирсона  $\chi^2$ ; б) составной; в) Колмогорова-Смирнова; г) Мизеса-Смирнова?
4. Что является статистикой критерия Пирсона  $\chi^2$ ?
5. Какие характеристики эмпирического распределения проверяются в каждой части составного критерия?
6. Какая вероятностная характеристика служит статистикой в критерии Колмогорова-Смирнова?
7. На основании каких параметров эмпирического распределения подсчитывается  $\Omega^2$ ?

8. Какие числовые характеристики эмпирического распределения рассматриваются в приближенных методах проверки гипотезы о нормальности распределения? С какими значениями сравниваются эти характеристики? Какова величина допустимого расхождения?

### 7.3. Примеры решения задач

**Задача 7.3.1.** Испытания 250 электроламп на их срок службы дали результаты, представленные в табл. 7.1.

Таблица 7.1.

Результаты испытаний электроламп

Срок службы, ч	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000	1000-1100	1100-1200
Количество электроламп $m_i$	2	16	24	42	64	50	32	14	6

Пользуясь критериями Пирсона  $\chi^2$  и Колмогорова - Смирнова, установите, согласуются ли данные испытания с законом нормального распределения.

Решение.

Интервальная форма, в которой представлены экспериментальные данные, уже подготовлена для построения гистограммы.

Находим относительные частоты для каждого интервала (3.1):

$$P_{э1} = 2/250 = 0,008$$

$$P_{э2} = 16/250 = 0,064$$

$$P_{э3} = 24/250 = 0,096$$

$$P_{э4} = 42/250 = 0,168$$

$$P_{э5} = 64/250 = 0,256$$

$$P_{э6} = 50/250 = 0,2$$

$$P_{э7} = 32/250 = 0,128$$

$$P_{э8} = 14/250 = 0,056$$

$$P_{э9} = 6/250 = 0,024$$

Строим гистограмму (задача 3.2.1.), показанную на рис. 7.1.

Рассчитываем теоретические вероятности попадания значений в каждый интервал в соответствии с законом нормального распределения:

$$P_{Ti} = \Phi \left( \frac{x_{Bi} - \bar{X}}{S} \right) - \Phi \left( \frac{x_{Hi} - \bar{X}}{S} \right), \quad (7.22)$$

где  $x_{Bi}$ ,  $x_{Hi}$  – соответственно верхняя и нижняя границы  $i$ -го интервала;

$\Phi (***)$  – функция Лапласа по приложению Б.

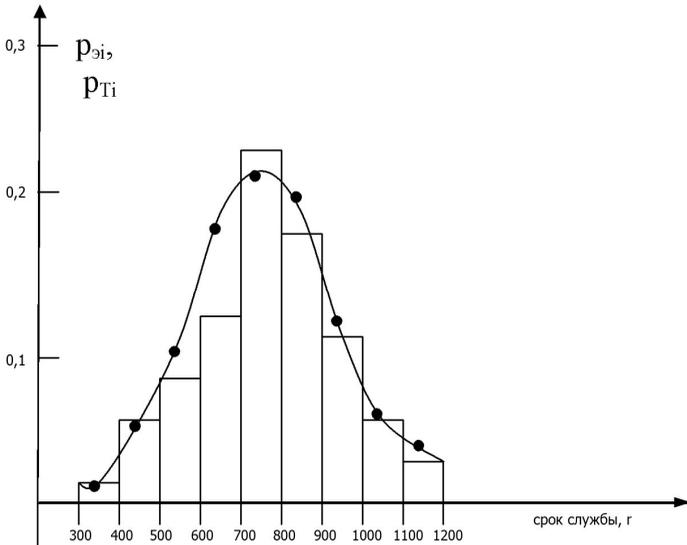


Рис. 7.1. Гистограмма и теоретическая кривая распределения вероятностей

Среднее арифметическое значение определяем по формуле (3.11), где  $x_i$  – середина  $i$ -го интервала:

$$\bar{X} = \frac{1}{250} \cdot (350 \cdot 2 + 450 \cdot 16 + 550 \cdot 24 + 650 \cdot 42 + 750 \cdot 64 + 850 \cdot 50 + 950 \cdot 32 + 1050 \cdot 14 + 1150 \cdot 6) = 763,6 \text{ (ч)}$$

СКО результатов испытаний (3.15):

$$S = \sqrt{\frac{1}{249} \left( (350 - 763,6)^2 \cdot 2 + (450 - 763,6)^2 \cdot 16 + (550 - 763,6)^2 \cdot 24 + (650 - 763,6)^2 \cdot 42 + \dots \right)}$$

$$\sqrt{+(750 - 763,6)^2 \cdot 64 + (850 - 763,6)^2 \cdot 50 + (950 - 763,6)^2 \cdot 32 + (1050 - 763,6)^2 \cdot 14 +$$

$$\sqrt{+(1150 - 763,6)^2 \cdot 6}) = 168,7868 \quad (u)$$

Теоретические вероятности:

$$P_{T1} = \Phi\left(\frac{400 - 763,6}{168,7868}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 763,6}{168,7868}\right) = \Phi(-2,15) - \Phi(-2,75) =$$

$$= -\Phi(2,15) + \Phi(2,75) = -0,4842 + 0,4970 = 0,0128$$

$$P_{T2} = \Phi\left(\frac{500 - 763,6}{168,7868}\right) - \Phi\left(\frac{400 - 763,6}{168,7868}\right) = \Phi(-1,56) - \Phi(-2,15) = -$$

$$0,4406 + 0,4842 = 0,0436$$

Аналогично, проводя вычисления для следующих интервалов, получаем:

$$P_{T3} = -0,3340 + 0,4406 = 0,1066$$

$$P_{T4} = -0,1480 + 0,3340 = 0,186$$

$$P_{T5} = 0,0864 + 0,1480 = 0,2344$$

$$P_{T6} = 0,2910 - 0,0864 = 0,2046$$

$$P_{T7} = 0,4192 - 0,2910 = 0,1282$$

$$P_{T8} = 0,4767 - 0,4192 = 0,0575$$

$$P_{T9} = 0,4952 - 0,4767 = 0,0185$$

Полученные значения  $P_{Ti}$  наносим на график (рисунок 7.1). Рассчитываем для каждого интервала расхождение эмпирического и теоретического распределений вероятностей в виде  $\chi^2_i$ :

$$\chi^2_i = \frac{(m_i - n \cdot P_{Ti})^2}{n \cdot P_{Ti}} \quad (7.23)$$

$$\chi^2_1 = \frac{(2 - 250 \cdot 0,0128)^2}{250 \cdot 0,0128} = 0,45$$

$$\chi^2_2 = \frac{(16 - 250 \cdot 0,0436)^2}{250 \cdot 0,0436} = 2,386$$

$$\chi_3^2 = \frac{(24 - 250 \cdot 0,1066)^2}{250 \cdot 0,1066} = 0,2635$$

$$\chi_4^2 = \frac{(42 - 250 \cdot 0,186)^2}{250 \cdot 0,186} = 0,4355$$

$$\chi_5^2 = \frac{(64 - 250 \cdot 0,2344)^2}{250 \cdot 0,2344} = 0,4976$$

$$\chi_6^2 = \frac{(50 - 250 \cdot 0,2046)^2}{250 \cdot 0,2046} = 0,0259$$

$$\chi_7^2 = \frac{(32 - 250 \cdot 0,1282)^2}{250 \cdot 0,1282} = 0,000078$$

$$\chi_8^2 = \frac{(14 - 250 \cdot 0,0575)^2}{250 \cdot 0,0575} = 0,00978$$

$$\chi_9^2 = \frac{(6 - 250 \cdot 0,0185)^2}{250 \cdot 0,0185} = 0,4088$$

Рассчитываем эмпирическое значение  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^9 \chi_i^2 \quad (7.24)$$

$$\chi^2 = 0,45 + 2,386 + 0,2635 + 0,4355 + 0,4976 + 0,0259 + 0,000078 + 0,00978 + 0,4088 = 4,477158 \approx 4,48$$

Полученное значение сравниваем с табличным  $\chi_{\tau}^2$ . По приложению Е для уровня значимости  $q=0,05$  и числа степеней свободы  $f=9-3=6$ :  $\chi_{\tau}^2=12,6$ .

$$\chi^2 < \chi_{\tau}^2: 4,48 < 12,6$$

Следовательно, гипотеза о соответствии эмпирического распределения нормальному теоретическому закону принимается.

Проверим эту гипотезу, применяя критерий Колмогорова-Смирнова. Рассчитываем накопленные относительные частоты для каждого интервала (3.28):

$$F_{Э1}=0,008$$

$$F_{Э2}=0,008+0,064=0,072$$

$$F_{Э3}=0,008+0,064+0,096=0,168$$

$$F_{Э4}=0,008+0,064+0,096+0,168=0,336$$

$$F_{Э5}=0,008+0,064+0,096+0,168+0,256=0,592$$

$$F_{Э6}=0,008+0,064+0,096+0,168+0,256+0,2=0,792$$

$$F_{Э7}=0,008+0,064+0,096+0,168+0,256+0,2+0,128=0,92$$

$$F_{Э8}=0,008+0,064+0,096+0,168+0,256+0,2+0,128+0,056=0,976$$

$$F_{Э9}=0,008+0,064+0,096+0,168+0,256+0,2+0,128+0,056+0,024=1$$

Рассчитываем накопленные теоретические вероятности для каждого интервала:

$$F_{Т1}=0,0128$$

$$F_{Т2}=0,0128+0,0436=0,0564$$

$$F_{Т3}=0,0128+0,0436+0,1066=0,163$$

$$F_{Т4}=0,0128+0,0436+0,1066+0,186=0,349$$

$$F_{Т5}=0,0128+0,0436+0,1066+0,186+0,2344=0,5834$$

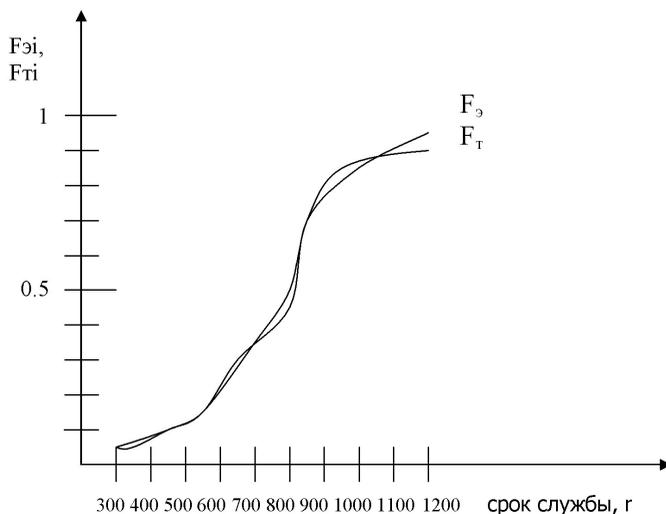
$$F_{Т6}=0,0128+0,0436+0,1066+0,186+0,2344+0,2046=0,788$$

$$F_{Т7}=0,0128+0,0436+0,1066+0,186+0,2344+0,2046+0,1282=0,9162$$

$$F_{Т8}=0,0128+0,0436+0,1066+0,186+0,2344+0,2046+0,1282+0,0575=0,9737$$

$$F_{Т9}=0,0128+0,0436+0,1066+0,186+0,2344+0,2046+0,1282+0,0575+0,0185=0,9922$$

Покажем графически на рис. 7.2 эмпирическую и теоретическую функции распределения вероятностей.



7.2. Эмпирическая и теоретическая функции распределения вероятностей

Определяем расхождение эмпирической и теоретической функций распределения в каждом интервале:

$$|F_{Э1} - F_{Т1}| = |0,008 - 0,0128| = 0,0048$$

$$|F_{Э2} - F_{Т2}| = |0,072 - 0,0564| = 0,0156$$

$$|F_{Э3} - F_{Т3}| = |0,168 - 0,163| = 0,005$$

$$|F_{Э4} - F_{Т4}| = |0,336 - 0,349| = 0,013$$

$$|F_{Э5} - F_{Т5}| = |0,592 - 0,5834| = 0,0086$$

$$|F_{Э6} - F_{Т6}| = |0,792 - 0,788| = 0,004$$

$$|F_{Э7} - F_{Т7}| = |0,92 - 0,9162| = 0,0038$$

$$|F_{Э8} - F_{Т8}| = |0,976 - 0,9737| = 0,0023$$

$$|F_{Э9} - F_{Т9}| = |1 - 0,9922| = 0,0078$$

Определяем наибольшую разность: в четвертом интервале  
 $D = 0,013$

$$\text{Рассчитываем } \lambda = 0,013 \cdot \sqrt{250} = 0,2056 \approx 0,2$$

По таблице приложения И определяем вероятность, с которой можно принять гипотезу:

$$P(\lambda) = P(0,2) = 1,000$$

**Задача 7.3.2.** Проверьте гипотезу о том, что скорость процесса полимеризации подчиняется закону нормального распределения:

25,2;24;22,1;21,8;21,0;22,6;25,7;23,5;24,2;24,7;25,4;26,8;23,9;24;25,3;26,6;24,5;23,3;22,6;23,6%.

Решение.

Число экспериментальных данных мало, поэтому применяем составной критерий. Рассчитываем среднее арифметическое значение (3.16):

$$\bar{X} = 1/20 \cdot (25,2 + 24 + 22,1 + 21,8 + 21 + 22,6 + 25,7 + \dots + 23,6) = 24,065\%$$

СКО результатов измерений (3.17):

$$S = 1,562816 \%$$

Проверяем критерий 1. Полагаем уровень значимости  $q_1 = 2\%$ . Рассчитываем параметр  $d$  (7.5). Для этого определяем смещённую оценку СКО. Зная несмещённую оценку СКО, используем формулу перехода:

$$S^* = S \sqrt{(n-1)/n} \quad (7.25)$$

$$S^* = 1,562816 \sqrt{(20-1)/20} = 1,523245 \%$$

$$d = \frac{1}{20 \cdot 1,523245} (|25,2 - 24,065| + |24 - 24,065| + |22,1 - 24,065| + |21,8 - 24,065| + \dots) = \frac{24,2}{20 \cdot 1,523245} = 0,794357 \approx 0,79$$

Определяем предельные значения  $d$  по таблице 1 приложения Ж:

$$d_{1-q_1/2} = d_{99\%} = 0,69$$

$$d_{q_1/2} = d_{1\%} = 0,9$$

Неравенство (7.4) выполняется:  $0,69 < 0,79 < 0,9$ , следовательно, гипотеза по критерию 1 принимается.

Проверяем гипотезу по критерию 2. Полагаем уровень значимости  $q_2=2\%$ .

По таблице 2 приложения Ж определяем вероятность P для  $q_2=2\%$  и  $n=20$ :  $P=0,99$

Определяем значение квантили  $t_{p/2, T}$ . е.  $t_{0,495}$  по таблице функции Лапласа (приложение Б):  $t_{0,495}=2,575^*$

Определяем критическое значение отклонений от центра распределения:

$$t_{p/2} \cdot S = 2,575 \cdot 1,562816 = 4,0242512 \%$$

Следовательно, предельные допустимые отклонения от среднего значения определяют границы:

- в сторону меньших значений:

$$\bar{X} - t_{p/2} \cdot S = 24,065 - 4,0243 = 20,0407 \%$$

- в сторону больших значений:

$$\bar{X} + t_{p/2} \cdot S = 24,065 + 4,0243 = 28,0893 \%$$

Среди экспериментальных данных нет значений, выходящих за эти границы. Гипотеза о соответствии нормальному распределению по критерию 2 и в целом по составному критерию принимается.

**Задача 7.3.3.** Произведены измерения емкости в выборке из партии конденсаторов, по результатам которых проверьте гипотезу о нормальном распределении ёмкости конденсаторов в выборке с использованием асимметрии и эксцесса.

Таблица 7.2

Результаты измерений ёмкости

Ёмкость $C_i$ , мкФ	30,32	30,34	30,37	30,40	30,44	30,48	30,55	30,60	30,64	30,70
Количество конденсаторов $m_i$	2	5	8	14	38	26	18	12	7	3

\* Значения функции интерполируются. Если  $\Phi(2,57)=0,4949$ ,  $\Phi(2,58)=0,4951$ ,

$$\text{то } \Phi\left(\frac{2,57 + 2,58}{2}\right) = \frac{0,4949 + 0,4951}{2} = 0,4950$$

Решение.

Рассчитываем числовые характеристики эмпирического распределения:

- среднее арифметическое значение (3.11):

$$\bar{X} = \frac{30,22+30,45+30,78+30,14+30,44+38+30,48+26+30,55+18+30,6+12+30,64+7+30,73}{2+5+8+14+38+26+18+12+7+3}$$

$$= \frac{4053,78}{133} = 30,4796 \text{ (мкФ)}$$

- СКО результатов измерений (3.15):

$$S^* = \left( \frac{1}{133} \cdot ((30,32-30,4796)^2 \cdot 2 + (30,34-30,4796)^2 \cdot 5 + (30,37-30,4796)^2 \cdot 8 + (30,4-30,4796)^2 \cdot 14 + (30,44-30,4796)^2 \cdot 38 + (30,48-30,4796)^2 \cdot 26 + (30,55-30,4796)^2 \cdot 18 + (30,6-30,4796)^2 \cdot 12 + (30,64-30,4796)^2 \cdot 7 + (30,7-30,4796)^2 \cdot 3) \right)^{1/2} = \left( \frac{0,98177328}{133} \right)^{1/2} = 0,08592 \text{ (мкФ)}$$

- асимметрия:  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^3 \cdot m_i / (S^*)^3$  (7.26)

$$\mu = \frac{1}{100 \cdot 0,08592^3} \cdot ((30,32-30,4796)^3 \cdot 2 + (30,34-30,4796)^3 \cdot 5 + (30,37-30,4796)^3 \cdot 8 + (30,4-30,4796)^3 \cdot 14 + (30,44-30,4796)^3 \cdot 38 + (30,48-30,4796)^3 \cdot 26 + (30,55-30,4796)^3 \cdot 18 + (30,6-30,4796)^3 \cdot 12 + (30,64-30,4796)^3 \cdot 7 + (30,7-30,4796)^3 \cdot 3) = \frac{1}{8,592} \cdot 0,046544139 = 0,551735$$

- эксцесс:  $\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^4 \cdot m_i / (S^*)^4$  (7.27)

$$\nu = \frac{1}{133 \cdot 0,08592^4} \cdot ((30,32-30,4796)^4 \cdot 2 + (30,34-30,4796)^4 \cdot 5 + (30,37-30,4796)^4 \cdot 8 + (30,4-30,4796)^4 \cdot 14 + (30,44-30,4796)^4 \cdot 38 + (30,48-$$

$$-30,4796)^4 \cdot 26 + (30,55 - 30,4796)^4 \cdot 18 + (30,6 - 30,4796)^4 \cdot 12 + (30,64 - 30,4796)^4 \cdot 7 + (30,7 - 30,4796)^4 \cdot 3 = \frac{0,019569568}{133 \cdot 0,08592^4} = 2,69992$$

Коэффициент эксцесса (7.19):  $E = 2,69993 - 3 = 0,30007$   
 Рассчитываем среднеквадратические погрешности:  
 – для асимметрии (7.20):

$$\mu_{\text{скп}} = \sqrt{6 * (133 - 1) / (133 + 1) * (133 + 3)} = 0,20846842$$

- для эксцесса (7.21):

$$E_{\text{скп}} = \frac{\sqrt{24 * 133 * (133 - 2) * (133 - 3) / (133 - 1) * (133 - 1) * (133 + 3) * (133 + 5)}}{0,407714199}$$

Сравниваем значения  $\mu$  и  $E$  с их среднеквадратическими погрешностями:

$$\mu / \mu_{\text{скп}} = \frac{0,551735}{0,208468642} = 2,64661$$

$$E / E_{\text{скп}} = \frac{0,30007}{0,407714199} = 0,735981$$

Коэффициент эксцесса меньше его погрешности, а асимметрия менее чем в 3 раза превышает её среднеквадратическую погрешность, поэтому можно принять гипотезу о соответствии эмпирического распределения ёмкости нормальному закону.

## 7.4. Задачи

**Задача 7.4.1** С помощью критерия согласия Колмогорова-Смирнова проверьте гипотезу о соответствии результатов многократных измерений силы тока в электрической сети нормальному закону распределения вероятностей. Данные приведены в таблице 7.3

Таблица 7.3

## Результаты измерений силы тока

Сила тока, А	8-8,2	8,2-8,4	8,4-8,6	8,6-8,8	8,8-9,0	9,0-9,2	9,2-9,4
Количество Результатов измерений $m_i$	2	5	12	24	10	4	3

**Задача 7.4.2.** Произведены прямые многократные измерения расстояния до объекта, результаты которых в виде отклонений от номинального значения распределились по интервалам, как представлено в таблице 7.4. Требуется:

- построить гистограмму эмпирического распределения;
- аппроксимировать эмпирическое распределение с помощью нормального закона;
- проверить согласованность теоретического нормального и эмпирического распределений, пользуясь критерием Пирсона  $\chi^2$  при доверительной вероятности  $P=0,975$ .

Таблица 7.4

## Результаты измерений расстояния

Отклонение Расстояния от номинально- го, м	-2,5; -2	-2; -1,5	-1,5; -1	-1; -0,5	-0,5; 0	0; 0,5	0,5; 1	1; 1,5	1,5; 2
Число эксперименталь- ных данных $m_i$	2	14	30	43	55	40	26	12	4

**Задача 7.4.3.** Измерения кислотности раствора дали результаты в единицах pH: 7,2; 7,5; 8,0; 7,8; 9,3; 6,8; 6,5; 7,6; 8,2; 8,5; 8,6; 7,9; 9,0; 8,8; 7,8; 7,6; 8,0; 7,7; 7,9; 7,7. Проверьте ряд на отсутствие промахов и определите, соответствует ли рассеяние экспериментальных данных нормальному закону распределения.

**Задача 7.4.4.** Используя приближенный метод, проверьте согласованность эмпирического распределения результатов испытаний радиоприёмников (таблица 7.5) и нормального закона распределения вероятностей.

Таблица 7.5

## Результаты испытаний радиоприёмников

Относительная влажность, %	68	70	74	80	82	83	84	85
Число результатов измерений $m_i$	1	3	10	17	9	5	2	1

**Задача 7.4.5.** В течение двух суток испытаний каждый час измеряется относительная влажность в климатической камере. Проверьте, соответствуют ли результаты измерений, представленные в табл. 7.6, нормальному закону распределения вероятностей.

Таблица 7.6

## Результаты измерений относительной влажности

Относительная влажность, %	68	70	74	80	82	83	84	85
Число результатов измерений $m_i$	1	3	10	17	9	5	2	1

**Задача 7.4.6.** При проверке прочности клеевого шва получен ряд значений усилий на разрыв, кН: 0,6; 0,62; 0,78; 0,65; 0,72; 0,8; 0,68; 0,66; 0,74; 0,71; 0,69; 0,66; 0,69; 0,7. Проверьте ряд на соответствие нормальному закону распределения и оцените доверительный интервал усилия на разрыв с вероятностью 0,95.

**Задача 7.4.7.** Результаты контроля диаметров двух выборок роликов представлены в табл. 7.7. Определите, взяты ли эти выборки из одной партии роликов или нет.

Таблица 7.7

## Результаты контроля диаметра роликов

Выборка1		Выборка2	
Значение диаметра, мм	Число роликов $m_i$	Значение диаметра, мм	Число роликов $m_i$
10,020	1	9,992	3
10,008	12	9,99	1
10,012	5	10,016	3
10,002	8	10,022	1
9,995	2	10,006	6
9,998	5	10,004	5
10,010	19	10,010	12
10,014	3	10,008	14
-	-	10,008	10

**Задача 7.4.8.** Определите, можно ли считать соответствующими нормальному закону эмпирические распределения, имеющие числовые характеристики, представленные в табл. 7.8.

Таблица 7.8.

## Характеристики эмпирических распределений

Характеристика распределения	Число данных $n$	Центральные моменты		
		второй $(x - \bar{x})^2$	третий $(x - \bar{x})^3$	четвертый $(x - \bar{x})^4$
1	60	1,573	0,1832	0,3145
2	80	2,128	0,1128	0,1862
3	110	4,615	0,0804	0,0301
4	150	7,326	0,0355	0,0258
5	200	10,622	0,19659	0,38164

**Задача 7.4.9.** Измерено сопротивление 14 образцов проволоки типа В-302. Результаты измерений, Ом: 0,129; 0,132; 0,128; 0,120; 0,126; 0,137; 0,124; 0,135; 0,119; 0,123; 0,122; 0,125; 0,124; 0,130. Определите, соответствуют ли эти данные нормальному закону распределения вероятностей, и установите вероятность попадания результата измерений в интервал от 0,122 до 0,128 Ом.

**Задача 7.4.10.** Проведены испытания на износ лакокрасочного покрытия. Потери веса образцов после испытаний представлены в табл. 7.9.

Определите, соответствует ли эмпирическое распределение нормальному закону с помощью критерия Пирсона и рассчитайте, в каких пределах будет находиться результат испытаний с доверительной вероятностью  $P=0,96$ .

Таблица 7.9

Результаты испытаний покрытия

Потери веса образцов, г	0,015-0,02	0,02-0,025	0,025-0,03	0,03-0,035	0,035-0,04	0,04-0,045	0,045-0,05
Число образцов $m_i$	1	7	18	44	20	8	2

**Задача 7.4.11.** Измерены после обработки на станке отклонения внутреннего диаметра зубчатых колес от заданного размера (таблица 7.10). Проверьте гипотезу о согласии с законом нормального распределения, используя критерии Мизеса-Смирнова  $\Omega^2$ , приняв уровень значимости  $q = 0,05$ .

Таблица 7.10

Результаты измерений внутреннего диаметра

Границы интервала отклонений, мкм	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
Абсолютная частота $m_i$	15	75	100	50	10

**Задача 7.4.12.** Проверьте гипотезу о соответствии нормального закону распределения расхода топлива автомобилем на 100 км пути (табл. 7.11), если проверка по критерию Пирсона  $\chi^2$  с уровнем значимости  $q = 0,05$  не дала однозначного результата.

Таблица 7.11  
Результаты измерения расхода топлива

Расход топлива на 100 км Q, л.	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
Абсолютная чистота $m_i$	5	23	40	64	38	20	10

**Задача 7.4.13.** Исследована интенсивность пребывания автомобилей на стоянку в различное время суток. (табл. 7.12) Проверьте, что распределение числа пребывающих автомобилей подчиняется нормальному закону, используя критерий  $\Omega^2$ , и определите вероятность такого соответствия по критерию Колмогорова - Смирнова.

Таблица 7.12  
Результаты исследований

Время суток, ч	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	0-3	3-6
Число пребывающих автомобилей, $m_i$	2	10	18	30	68	45	20	4

**Задача 7.4.14.** Используя характеристики асимметрии и эксцесса, проверьте результаты измерений мощности на соответствие нормальному закону распределения.

Результаты измерений мощности, Вт: 1700; 1560; 1850; 1680; 1694; 1660; 1730; 1742; 1750; 1610; 1754; 1728; 1675; 1690; 1780; 1800.

**Задача 7.4.15.** Определите наибольшее и наименьшее значение размеров в выборке объемом  $n = 20$  со средним значением  $X = 15,28$  мм и смешанным СКО  $S^* = 2,462$  мм, чтобы при проверке по составному критерию с уровнем значимости  $q = 10\%$  не было отклонений от среднего, превышающих допустимое значение.

**Задача 7.4.16.** Определите наибольшее расхождение эмпирической и теоретической накопленных частот выборки объемом  $n = 28$ , чтобы с вероятностью не менее 99,7% можно было принять гипотезу о нормальности распределения данных в выборке.

**Задача 7.4.17.** Какое наибольшее значение может принять сумма абсолютных отклонений от среднего в выборке объемом  $n = 36$  и несмещенным СКО  $S = 3,15$ , чтобы с уровнем значимости  $q = 2\%$  можно было принять распределение данных в ней соответствующим нормальному теоретическому закону.

**Задача 7.4.18.** Определите, с вероятностью 0,96 наибольшее допустимое расхождение накопленных частот выборок объемами  $n_1 = 12$  и  $n_2 = 20$ , взятых из одной партии изделий.

**Задача 7.4.19.** При выборочном контроле веса фасованного продукта, упакованного двумя автоматами, получили результаты взвешивания, приведенные в таблице 7.13. Можно ли с вероятностью не менее 0,9 отнести все расфасовки к одной партии продукта?

Таблица 7.13

Результаты выборочного контроля фасованного продукта, г

Выборка 1	240	244	254	250	258	242	240	226	256	260	236	240	248	250
Выборка 2	235	250	246	236	230	250	248	252	245	235	–	–	–	–

**Задача 7.4.20.** Каким должно быть в среднем значение  $\chi^2$  для каждого  $i$ -го из девяти интервалов гистограммы, чтобы с вероятностью не менее 0,975 можно было принять гипотезу о нормальности эмпирического распределения?

**Задача 7.4.21.** Определите объем двух одинаковых выборок если по критерию Колмогорова – Смирнова установлено, что они принадлежат к одной партии изделий с вероятностью  $P = 0,98$  при наибольшем расхождении относительных накопленных частот равном  $D = 0,48$ .

**Задача 7.4.22.** Проведены испытания на прочность паяных соединений (таблица 7.14). Определите вероятность, с которой результаты испытаний можно считать подчиняющимися нормальному закону распределения.

Таблица 7.14.

## Результаты испытаний на прочность

Сила связи, Н	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90
Число разрушенных соединений $m_i$	2	4	3	10	19	31	43	89	110	208	180	150	80	35	8

**Задача 7.4.23.** Определите значения смещенной и несмещенной оценок СКО 36 результатов измерений электрического сопротивления, если для составного критерия наибольшее допустимое отклонение от среднего значения равно 7,210 Ом при уровне значимости  $q = 8\%$

**Задача 7.4.24.** Определите, с уровнем значимости  $q = 4\%$ , соответствует ли электрическое распределение результатов измерений выборки объемом  $n = 40$  нормальному закону, если сумма абсолютных отклонений результатов измерений от среднего значения 12 мм, сумма квадратов этих отклонений 6,38 мм, наибольшее отклонение от среднего значения 1 мм.

**Задача 7.4.25.** Для 70 результатов измерений силы тока рассчитаны эмпирические и теоретические вероятности (таблица 7.15). Определите, подчиняются ли результаты измерений нормальному закону распределения с помощью критерия Пирсона  $\chi^2$  при доверительной вероятности 0,99.

Таблица 7.15

## Вероятности для результатов измерений силы тока

№ Интервала значений	Эмпирическая вероятность	Теоретическая вероятность
1	0,029	0,030
2	0,057	0,062
3	0,10	0,096
4	0,157	0,165
5	0,257	0,274
6	0,20	0,216
7	0,114	0,100
8	0,071	0,052
9	0,015	0,008

**Задача 7.4.26.** Пользуясь критерием Колмогорова - Смирнова, определите вероятность, с которой распределение результатов измерений силы тока (табл. 7.15) можно считать соответствующим нормальному закону.

**Задача 7.4.27.** Определите число результатов измерений, для которых с помощью критерия Колмогорова – Смирнова определена вероятность соответствия теоретическому нормальному распределению, равная 86,4%, при наибольшем расхождении накопленных вероятностей 0,045.

**Задача 7.4.28.** По результатам измерений, приведенным в таблице 7.10, определите, для какого уровня значимости можно принять гипотезу о соответствии экспериментальных данных нормальному закону распределения по критерию Пирсона.

**Задача 7.4.29.** Измерительная лаборатория получила две группы образцов стали. После определения содержания в них углерода получены результаты, приведенные в табл. 7.16. Можно ли отнести все образцы к одной партии стали?

Таблица 7.16

Результаты определения содержания углерода в образцах стали

Интервалы %-го содержания углерода	Группа образцов	
	1	2
1,2-1,3	1	4
1,3-1,4	7	10
1,4-1,5	12	14
1,5-1,6	9	8
1,6-1,7	5	3
1,7-1,8	3	1

**Задача 7.4.30.** Проверьте, соответствуют ли распределения результатов измерений, приведенных в табл. 7.16, нормальному закону используя составной критерий с общим уровнем значимости  $q = 10\%$ .

## **8. ВИДЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ**

### **8.1. Основные положения**

#### **8.1.1. Виды измерений (прямые, косвенные, совокупные, совместные)**

Целью измерения является нахождение соотношения измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины. По способу получения значения измеряемой величины измерения делят на прямые, косвенные, совокупные и совместные.

Прямое измерение – это измерение, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно из опытных данных.

Косвенные измерения представляют собой определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Совокупные измерения – это проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях.

Совместные измерения – это проводимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для определения зависимости между ними.

Перед статистической обработкой результатов измерений из опытных данных должны быть:

- а) исключены известные систематические погрешности;
- б) проверены и исключены грубые погрешности и промахи.

Общий порядок статистической обработки результатов измерений представляет собой:

- а) проверку гипотезы о соответствии эмпирического распределения нормальному закону по одному из критериев;

б) определение числовых характеристик результатов измерений – среднего арифметического значения, дисперсии или СКО;

в) определение СКО среднего значения результата измерения и доверительных границ случайной составляющей погрешности измерений;

\*г) определение границ не исключенных систематических погрешностей (НСП) и их влияния на результат измерений;

д) расчет доверительного интервала результата измерений.

Порядок выполнения расчетов по отдельным пунктам для прямых измерений был рассмотрен в предыдущих главах (3,4,7). Для результатов других видов измерений есть особенности статистической обработки.

Алгоритмы обработки результатов косвенных измерений устанавливаются в зависимости от взаимного влияния (корреляции) погрешностей измерений аргументов и вида функциональной зависимости между измеряемой величиной и ее аргументами.

Корреляция между погрешностями измерения аргументов существует, если выполняется условие:

$$\left| \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \right| > t_P \quad (8.1)$$

где  $n$  - число измерений каждого аргумента;

$t_P$  – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $f = n - 2$ ;

$r$  – коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (a_{hi} - \bar{a}_h) \cdot (a_{ki} - \bar{a}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{hi} - \bar{a}_h)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (a_{ki} - \bar{a}_j)^2}}, \quad (8.2)$$

где  $a_{hi}$ ,  $a_{ki}$  – результаты  $i$ -го измерения, соответственно  $h$ -го и  $j$ -го аргумента;

---

\*Пункт (г) выполняется в особо точных случаях при возможности определения границ НСП.

$\bar{a}_h, \bar{a}_k$  – средние значения измеренных аргументов.

При установлении корреляции и нормальном распределении погрешностей измерений аргументов порядок статистической обработки определяется видом функциональной зависимости измеряемой величины от ее аргументов.

При линейной функциональной зависимости вида

$$A = \sum_{j=1}^m b_j \cdot a_j, \quad (8.3)$$

где  $b_j$  – коэффициент при  $a_j$ -м аргументе,

СКО среднего измеряемой величины определяется по формуле:

$$S_{\bar{A}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m b_j^2 \cdot S^2(\bar{a}_j)}, \quad (8.4)$$

где  $S(\bar{a}_j)$  – СКО среднего для  $j$ -го аргумента:

$$S(\bar{a}_j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_{ji} - \bar{a}_j)^2}{n \cdot (n-1)}} \quad (8.5)$$

При нелинейной функциональной зависимости: СКО среднего измеряемой величины определяется по формуле:

$$S_{\bar{A}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial a_j} \right)^2 \cdot S^2(\bar{a}_j)}, \quad (8.6)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial a_j}$  – первая частная производная функциональной зависимости  $f$  измеряемой величины от аргументов по  $a_j$ -му аргументу.

При линеаризации нелинейной зависимости появляется методическая НСП от округления ряда разложения Тейлора – R:

$$R = \frac{1}{2} d^2 f, \quad (8.7)$$

где  $d^2 f$  – полный дифференциал второго порядка функциональной зависимости  $f$ .

Методической погрешностью R можно пренебречь, если

$$R < 0,8S_{\tilde{A}}. \quad (8.8)$$

В противном случае R должна учитываться в окончательном результате измерений.

При отсутствии корреляции, независимо от вида распределения экспериментальных данных и функциональной зависимости применяется метод приведения:

- вычисляются текущие значения измеряемой величины:

$$\begin{aligned} A_1 &= f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m1}) \\ A_2 &= f(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ &\dots\dots\dots \\ A_i &= f(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj}) \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= f(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}); \end{aligned} \quad (8.9)$$

где  $a_{ij}$  – i-е значение j-го аргумента.

- рассчитывается оценка среднего измеряемой величины:

$$\tilde{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i; \quad (8.10)$$

- рассчитывается СКО оценки среднего измеряемой величины:

$$S_{\tilde{A}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \tilde{A})^2}{n \cdot (n-1)}}. \quad (8.11)$$

Окончательный результат косвенных измерений представляют в форме доверительного интервала:

$$\tilde{A} - t_p \cdot S_{\tilde{A}} \leq A \leq \tilde{A} + t_p \cdot S_{\tilde{A}}, \quad (8.12)$$

где  $t_p$  – коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности P.

Результаты совокупных и совместных измерений получают из системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = l_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = l_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_ix + b_iy + c_iz = l_i \\ \dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_nz = l_n \end{cases} \quad (8.13)$$

где  $a_i, b_i, c_i, l_i$  - величины, получаемые при измерениях;  
 $x, y, z$  - искомые величины.

Для повышения точности результатов измерений в системе должно быть больше уравнений, чем число неизвестных.

Первоначальная система условных уравнений приводится к системе нормальных уравнений вида:

$$\begin{cases} [aa]x + [ab]y + [ac]z = [al] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z = [bl] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z = [cl] \end{cases} \quad (8.14)$$

\*где  $[aa] = \sum_{i=1}^n a_i a_i$ ,  $[ab] = \sum_{i=1}^n a_i b_i$  и т.п.

Решением системы (8.14) являются оценки искомых величин  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ . Подставляя эти значения в условные уравнения, определяют остаточные погрешности  $V_i$ , так называемые «невязки». Невязки определяют погрешности измерения искомых величин, на основании которых рассчитываются доверительные интервалы этих величин.

---

\*При проведении совместных измерений условные уравнения равноточные, при совокупных измерениях из-за различных сочетаний измеряемых величин уравнения неравноточны, и вводится дополнительная характеристика – вес:

$$p = \frac{n}{S^2}. \quad (8.15)$$

На коэффициент  $p$  умножаются все величины  $a, b, c, l$ .

### 8.1.2. Методы измерений

Для повышения точности разработаны различные методы измерений. Метод измерения – это прием или совокупность приемов сравнения измеряемой физической величины с ее единицей в соответствии с реализованным принципом измерений. Методы измерений можно разделить на метод непосредственной оценки и группу методов сравнения с мерой.

Метод непосредственной оценки – это метод измерений, при котором значение величины определяют непосредственно по показаниям средства измерений.

Методы сравнения с мерой предполагают сравнение измеряемой величины с величиной, воспроизводимой мерой. К методам сравнения с мерой относятся нулевой, дифференциальный методы, методы измерений замещением, дополнением и метод противопоставления.

Нулевой метод измерений – это метод, в котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на прибор сравнения доводят до нуля.

Дифференциальный метод измерений – это метод, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, и при котором измеряется разность между этими двумя величинами.

Метод измерений замещением – это метод, в котором измеряемую величину заменяют мерой с известным значением величины.

Метод измерений дополнением – это метод, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

Метод противопоставления – это метод измерений, в котором на прибор сравнения воздействует величина, равная отношению измеряемой величины и известной величины, воспроизводимой мерой.

## 8.2. Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается цель любого измерения?
2. Какие бывают виды измерений?
3. В чем отличие прямых измерений от косвенных?
4. В чем различия совместных и совокупных измерений?
5. Как должны быть подготовлены экспериментальные данные для статистической обработки?
6. Каков общий порядок статистической обработки результатов измерений?
7. Как установить, есть ли взаимосвязь между измеряемыми аргументами?
8. Приведите порядок статистической обработки результатов косвенных измерений: а) при линейной зависимости; б) при нелинейной зависимости; в) при наличии корреляции между измеренными аргументами.
9. Приведите порядок обработки результатов совместных измерений.
10. Почему при обработке результатов совокупных измерений вводится статистический вес?
11. Что называется методом измерений?
12. В чем отличие метода непосредственной оценки и метода сравнения с мерой?
13. В чем сходство дифференциального и нулевого методов измерений?
14. В чем отличие: а) дифференциального метода и метода противопоставления; б) методов измерений замещением и дополнением?

### 8.3. Примеры решения задач

**Задача 8.3.1.** Выполните статистическую обработку результатов прямых многократных измерений диаметра отверстия, приведенных в таблице 8.1, с доверительной вероятностью  $P=0,96$ , и определите его годность, если размер по чертежу  $\varnothing 12^{+0,035}$  мм. Систематические погрешности исключены.

Таблица 8.1.

Результаты измерений диаметра отверстия

Диаметр отверстия, мм	11,520	11,900	12,010	12,015	12,020	12,028	12,035	12,058	12,985
Число измерений, $m_i$	1	2	4	7	18	9	5	3	1

Решение.

Проверяем ряд результатов измерений на отсутствие промахов.

Среднее арифметическое значение (3.11):

$$\bar{X} = \frac{1}{50}(11,52 + 11,9 \cdot 2 + 12,01 \cdot 4 + 12,015 \cdot 7 + 12,02 \cdot 18 + 12,028 \cdot 9 + 12,035 \cdot 5 + 12,058 \cdot 3 + 12,985) =$$

$$= \frac{601,411}{50} = 12,02822 \text{ (мм)}$$

СКО результатов измерений (3.15):

$$s = \sqrt{\frac{1}{50-1}((11,52 - 12,02822)^2 + (11,9 - 12,02822)^2 \cdot 2 + (12,01 - 12,02822)^2 \cdot 4 + (12,015 - 12,02822)^2 \cdot 7 +$$

$$\sqrt{+ (12,02 - 12,02822)^2 \cdot 18 + (12,028 - 12,02822)^2 \cdot 9 + (12,035 - 12,02822)^2 \cdot 5 + (12,058 - 12,02822)^2 \cdot 3 +$$

$$\sqrt{+ (12,985 - 12,02822)^2})} = \sqrt{\frac{1,21325458}{49}} = \sqrt{0,024760297} = 0,157354051 \text{ (мм)}$$

Проверяем наименьшее и наибольшее значения. Рассчитываем значения квантилей (4.1):

$$t_1 = \frac{|11,52 - 12,02822|}{0,157354051} \approx 3,2298; \quad t_2 = \frac{|12,985 - 12,02822|}{0,157354051} \approx 6,08$$

По критерию Шарлье для  $n=50$  предельно допустимое значение  $k_{ш}=2,32$  (приложение Г). Следовательно, проверяемые значения являются промахами. Их исключаем из вариационного ряда и рассчитываем  $\bar{X}$  и  $S$ :

$$\bar{X} = \frac{1}{48} \cdot 576,906 = 12,018875 \text{ (мм)}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{48-1} \left( (11,9-12,018875)^2 \cdot 2 + (12,01-12,018875)^2 \cdot 4 + (12,015-12,018875)^2 \cdot 7 + (12,02-12,018875)^2 \cdot 18 + \right.}$$

$$\left. \sqrt{+ (12,028-12,018875)^2 \cdot 9 + (12,035-12,018875)^2 \cdot 5 + (12,058-12,018875)^2 \cdot 3} = \sqrt{\frac{0,055574468}{47}} =$$

$$= \sqrt{0,001182435} = 0,034386559 \text{ (мм)}$$

Проверяем значения, оставшиеся крайними в ряду экспериментальных данных:

$$t_3 = \frac{|11,9 - 12,018875|}{0,034386559} \approx 3,457$$

Значение 11,9 исключаем и пересчитываем  $\bar{X}$  и  $S$ :

$$\bar{X} = \frac{553,106}{46} = 12,02404348 \text{ (мм)}$$

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{1}{46-1} \left( (12,01-12,02404348)^2 \cdot 4 + (12,015-12,02404348)^2 \cdot 7 + (12,02-12,02404348)^2 \cdot 18 + \right.}$$

$$\left. \sqrt{+ (12,028-12,02404348)^2 \cdot 9 + (12,035-12,02404348)^2 \cdot 5 + (12,058-12,02404348)^2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,005855913}{45}} = \sqrt{0,000130131} = 0,011407515 \text{ (мм)}$$

$$t_4 = \frac{|12,058 - 12,02404348|}{0,011407515} \approx 2,9767$$

Значение квантиля  $t_4$  также превышает  $k_{ш}$ , поэтому исключаем данные 12,058.

$$\bar{X} = \frac{516,932}{43} = 12,02167442 \text{ (мм)}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{43-1} \left( (12,01 - 12,02167442)^2 \cdot 4 + (12,015 - 12,02167442)^2 \cdot 7 + (12,02 - 12,02167442)^2 \cdot 18 + \right.}$$

$$\left. \sqrt{+ (12,028 - 12,02167442)^2 \cdot 9 + (12,035 - 12,02167442)^2 \cdot 5} \right) = \sqrt{\frac{0,002155441}{42}} = \sqrt{0,00005132} = 0,0071638 \text{ (мм)}$$

Проверяем значение 12.01 мм:

$$t_5 = \frac{|12,01 - 12,02167442|}{0,0071638} = 1,6296, \text{ что не превышает значения } k_{ш} = 2,32$$

Следовательно, результат измерений 12,01 мм не является промахом.

Проверяем значение 12,035 мм:

$$t_6 = \frac{|12,035 - 12,02167442|}{0,0071638} = 1,86$$

Это значение также не содержит грубых погрешностей и остается в ряду экспериментальных данных.

Проверяем гипотезу о соответствии эмпирического распределения нормальному закону по составному критерию, т.к.  $n < 50$ .

Критерий 1 – уровень значимости  $q_1 = 2\%$ .

По формуле (7.25):

$$S^* = 0,0071638 \sqrt{\frac{43-1}{43}} = 0,00708 \text{ (мм)}$$

Рассчитываем параметр  $d$  (7.5):

$$d = \frac{1}{43 \cdot 0,00708} \left( |12,01 - 12,02167442| \cdot 4 + |12,015 - 12,02167442| \cdot 7 + |12,02 - 12,02167442| \cdot 18 + \right.$$

$$+ |12,028 - 12,02167442| \cdot 9 + |12,035 - 12,02167442| \cdot 5 = \frac{0,2471163}{43 \cdot 0,00708} \approx 0,8117$$

Определяем предельно допустимые значения в по приложению Ж:

$$d_{1-\frac{q_1}{2}} = 0,72; d_{\frac{q_1}{2}} = 0,87.$$

Гипотеза по критерию 1 принимается, так как выполняется неравенство (7.4):

Критерий 2 – уровень значимости  $q_2=2\%$ . По табл. 2 приложения 3 доверительная вероятность  $P=0,99$ .

$$\Phi(t_{p/2}) = \frac{P}{2} = \frac{0,99}{2} = 0,495$$

По таблице 1 приложения Б  $t_{p/2}=2,575$ .

$$t_{p/2} \cdot S = 2,575 \cdot 0,0071638 = 0,018446785 \text{ (мм)}$$

$$|12,01 - 12,02167442| = 0,01167442 \text{ (мм);}$$

$$|12,015 - 12,02167442| = 0,00667442 \text{ (мм);}$$

$$|12,02 - 12,02167442| = 0,00167442 \text{ (мм);}$$

$$|12,028 - 12,02167442| = 0,00632558 \text{ (мм);}$$

$$|12,035 - 12,02167442| = 0,01332558 \text{ (мм)}$$

Ни для одного из экспериментальных данных отклонение от среднего не превышает  $(t_{p/2} \cdot S)$ , поэтому гипотеза принимается по критерию 2 и в целом по составному критерию.

Рассчитываем доверительный интервал для  $P = 0,96$  по формуле (3.22).

Коэффициент Стьюдента  $t_{p/2} = 2,055$ .

$$12,02167442 - 2,055 \cdot \frac{0,0071638}{\sqrt{43}} \leq X \leq 12,02167442 + 2,055 \cdot \frac{0,0071638}{\sqrt{43}}$$

$$12,02167442 - 0,002245024 \leq X \leq 12,02167442 + 0,002245024$$

$$12,0194294 \text{ мм} \leq X \leq 12,02391944 \text{ мм};$$

$$12,019 \text{ мм} \leq X \leq 12,024 \text{ мм}$$

Округление производим до знака, с которым указаны предельно допустимые значения размера.

Предельно допустимые значения диаметра:

$$D_{\min} = 12,000 \text{ мм}, D_{\max} = 12,035 \text{ мм}.$$

Границы доверительного интервала входят в границы предельно допустимых значений:

12,019 мм > 12,000 мм и 12,024 мм < 12,035 мм, следовательно, диаметр отверстия является годным, так как находится в поле допуска размера.

**Задача 8.3.2.** Определите электрическую емкость батареи (параллельно соединенных конденсаторов), при доверительной вероятности  $P = 0,95$ , если результаты измерений емкости каждого из них распределены по нормальному закону и представлены в табл. 8.2. Систематические и грубые погрешности исключены.

Таблица 8.2.

Результаты измерений емкости, мкФ

Конденсатор № измерения	C1	C2	C3	C4
1	2,1	5,9	7,6	10,2
2	2,8	6,2	7,8	10,5
3	2,5	6,4	8,2	10,8
4	2,4	6,1	8,6	10,3
5	2,2	6,0	7,9	10,0

Решение.

При параллельном соединении емкость батареи конденсаторов имеет линейную зависимость:

$$C_{\delta} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (8.16)$$

Корреляция между погрешностями измерений емкости отсутствует, так как измерения были проведены при включении конденсаторов по отдельности. Применяем алгоритм обработки для линейной зависимости.

Определяем средние арифметические значения и СКО среднего для каждого конденсатора.

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{5}(2,1 + 2,8 + 2,5 + 2,4 + 2,2) = 2,4 \text{ (мкФ)}$$

$$S(\bar{C}_1) = \sqrt{\frac{(2,1-2,4)^2 + (2,8-2,4)^2 + (2,5-2,4)^2 + (2,4-2,4)^2 + (2,2-2,4)^2}{5 \cdot (5-1)}} = \\ = \frac{0,273861278}{\sqrt{5}} = 0,122474486 \text{ (мкФ)}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{1}{5}(5,9 + 6,2 + 6,4 + 6,1 + 6) = 6,12 \text{ (мкФ)}$$

$$S(\bar{C}_2) = \sqrt{\frac{(5,9-6,12)^2 + (6,2-6,12)^2 + (6,4-6,12)^2 + (6,1-6,12)^2 + (6-6,12)^2}{5(5-1)}} = \\ = \frac{0,19235384}{\sqrt{5}} = 0,086023252 \text{ (мкФ)}$$

$$\bar{C}_3 = \frac{1}{5}(7,6 + 7,8 + 8,2 + 8,6 + 7,9) = 8,02 \text{ (мкФ)}$$

$$S(\bar{C}_3) = \sqrt{\frac{(7,6-8,02)^2 + (7,8-8,02)^2 + (8,2-8,02)^2 + (8,6-8,02)^2 + (7,9-8,02)^2}{5 \cdot (5-1)}} = \\ = \frac{0,389871773}{\sqrt{5}} = 0,174355957 \text{ (мкФ)}$$

$$\bar{C}_4 = \frac{1}{5}(10,2 + 10,5 + 10,8 + 10,3 + 10) = 10,36 \text{ (мкФ)}$$

$$S(\bar{C}_4) = \sqrt{\frac{(10,2 - 10,36)^2 + (10,5 - 10,36)^2 + (10,8 - 10,36)^2 + (10,3 - 10,36)^2 + (10 - 10,36)^2}{5 \cdot (5 - 1)}} =$$

$$= \frac{0,304959013}{\sqrt{5}} = 0,136381817 \text{ (мкФ)}$$

Определяем оценку среднего значения емкости батареи в соответствии с формулой (8.16):

$$\tilde{C}_8 = 2,4 + 6,12 + 8,02 + 10,36 = 26,9 \text{ (мкФ)}$$

Рассчитываем СКО оценки среднего емкости батареи (8.4):

$$S_{\tilde{C}_8} = \sqrt{0,122474486^2 + 0,086023252^2 + 0,174355957^2 + 0,136381817^2} =$$

$$= \sqrt{0,071399999} = 0,267207783 \text{ (мкФ)}$$

Рассчитываем доверительный интервал (8.12).

Коэффициент Стьюдента для  $P = 0,95$  и числа степеней свободы, которое при линейной зависимости определяется по формуле:

$$f = \frac{\left(\sum_{j=1}^m b_j^2 \cdot S^2(\bar{a}_j)\right)^2 - 2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{b_j^4 \cdot S^4(\bar{a}_j)}{n_j + 1}\right)}{\sum_{j=1}^m \frac{b_j^4 \cdot S^4(\bar{a}_j)}{n_j + 1}} \quad (8.17)$$

где  $n_j$  – число измерений  $a_j$  - го аргумента, равно:

$$f = \frac{0,071399999^2 - \frac{2}{6}(0,122474486^4 + 0,086023252^4 + 0,174355957^4 + 0,136381817^4)}{\frac{1}{6}(0,122474486^4 + 0,086023282^4 + 0,174355957^4 + 0,136381817^4)} =$$

$$= \frac{0,005097959 - \frac{1}{3} \cdot 0,001549876}{\frac{1}{6} \cdot 0,001549879} = 17,73557 \approx 18.$$

По приложению А  $t_p = 2,11$ . Доверительный интервал:

$$26,9 - 2,11 \cdot 0,267207783 \leq C_s \leq 26,9 + 2,11 \cdot 0,267207783$$

$$26,33619158 \text{ мкФ} \leq C_s \leq 27,46380842 \text{ мкФ};$$

$$26,336 \text{ мкФ} \leq C_s \leq 27,464 \text{ мкФ}$$

**Задача 8.3.3.** Определите мощность в электрической цепи по результатам измерений силы тока и напряжения (таблица 8.3), при доверительной вероятности  $P = 0,98$  и нормальном распределении случайных погрешностей измеряемых аргументов. Систематические и грубые погрешности исключены.

Таблица 8.3

Результаты измерений параметров электрической цепи

№ измерения \ Измеренный параметр	Сила тока, А	Напряжение, В
1	5,2	12,6
2	5,0	11,8
3	5,5	12,0
4	5,8	12,7
5	4,8	11,9
6	5,3	12,5

Решение.

Для определения алгоритма обработки результатов измерений необходимо определить, есть ли корреляция между погрешностями измеряемых аргументов. Рассчитываем средние арифметические значения:

$$\bar{I} = \frac{5,2 + 5 + 5,5 + 5,8 + 4,8 + 5,3}{6} = 5,266666667 \text{ (А)}$$

$$\bar{U} = \frac{12,6 + 11,8 + 12 + 12,7 + 11,9 + 12,5}{6} = 12,25 \text{ (В)}$$

Определяем коэффициент корреляции (8.2):

$$r = \frac{(5,2-5,27)(12,6-12,25) + (5-5,27)(11,8-12,25) + (5,5-5,27)(12-12,25) + (5,8-5,27)(12,7-12,25) + (4,8-5,27)(11,9-12,25) + (5,3-5,27)(12,5-12,25)}{\sqrt{((5,2-5,27)^2 + (5-5,27)^2 + (5,5-5,27)^2 + (5,8-5,27)^2 + (4,8-5,27)^2 + (5,3-5,27)^2) \cdot ((12,6-12,25)^2 + (11,8-12,25)^2 + (12-12,25)^2 + (12,7-12,25)^2 + (11,9-12,25)^2 + (12,5-12,25)^2)}} = \frac{0,449999999}{0,700594983} = 0,642311192$$

Проверяем условие наличия корреляции (8.1):

$$\frac{0,642311192\sqrt{6-2}}{\sqrt{1-0,642311192}} = \frac{1,284622384}{0,766443952} = 1,676081311 \approx 1,68$$

Коэффициент Стьюдента по приложению А для вероятности  $P = 0,98$  и числа степеней свободы  $f = n-2 = 6-2 = 4$  равен  $t_p = 3,75$ , т.е. неравенство (8.1) не выполняется:  $1,68 < 3,75$ , и корреляция отсутствует.

Применяем алгоритм для нелинейной зависимости.  
СКО среднего силы тока (8.5):

$$S(\bar{I}) = \sqrt{\frac{1}{6(6-1)}((5,2-5,27)^2 + (5-5,27)^2 + (5,5-5,27)^2 + (5,8-5,27)^2 + (4,8-5,27)^2 + (5,3-5,27)^2)} = \frac{0,355902608}{\sqrt{6}} = 0,145296631 \text{ (A)}$$

СКО среднего напряжения (8.5):

$$S(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{6(6-1)}((12,6-12,25)^2 + (11,8-12,25)^2 + (12-12,25)^2 + (12,7-12,25)^2 + (11,9-12,25)^2 + (12,5-12,25)^2)} = \frac{0,393700393}{\sqrt{6}} = 0,160727512 \text{ (B)}$$

Частные производные функциональной зависимости:

$$P = I \cdot U \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = U \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial U} = I \quad (8.20)$$

СКО среднего мощности (8.6):

$$S_{\bar{P}} = \sqrt{\bar{U}^2 \cdot S^2(\bar{I}) + \bar{I}^2 \cdot S^2(\bar{U})} \quad (8.21)$$

$$S_{\bar{P}} = \sqrt{(12,25 \cdot 0,145296631)^2 + (5,27 \cdot 0,160727512)^2} = 1,970924997 \text{ (Bm)}$$

Рассчитываем остаточный член ряда Тейлора и оцениваем его влияние на результат измерений.

Полный дифференциал второго порядка функциональной зависимости (8.18):

$$d^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial I^2} (\Delta I)^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial U^2} (\Delta U)^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial I \partial U} \Delta I \cdot \Delta U = 2 \cdot \Delta I \cdot \Delta U \quad (8.22)$$

где  $\Delta I, \Delta U$  - наибольшие (по модулю) отклонения от среднего.

Остаточный член ряда Тейлора (8.7):

$$R = \frac{1}{2} d^2 P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Delta I \cdot \Delta U = 0,5333333333 \cdot 0,45 = 0,2399999999 \text{ (Bm)}$$

Неравенство (8.8) выполняется:

$$0,2399999999 < 0,8 \cdot 1,970924997; \quad 0,2399999999 < 1,57674$$

Следовательно, R не влияет на результат измерений и не учитывается.

Оцениваем среднее значение мощности:

$$\tilde{P} = \bar{I} \cdot \bar{U} \quad (8.23)$$

$$\tilde{P} = 5,27 \cdot 12,25 = 64,51666667 \text{ (Bm)}$$

Рассчитываем доверительный интервал:

$$64,51666667 - 3,75 \cdot 1,970924997 \leq P \leq 64,51666667 + 3,75 \cdot 1,970924997$$

$$57,12569793 \text{ Bm} \leq P \leq 71,90763541 \text{ (Bm)}; \quad 57,126 \text{ Bm} \leq P \leq 71,908 \text{ Bm}$$

**Задача 8.3.4.** При поверке гирь посредством измерения их в различных сочетаниях между собой и с эталоном получены показания, приведенные в таблице 8.4. Определите вид измерений и значения каждой из гирь с доверительной вероятностью  $P = 0,95$ .

Таблица 8.4

Показания весов, г, при сочетании гирь

Сочетания гирь № измерения	1	2	3	4	5
	$x+y$	$x+y+z$	$x-y+z$	$-y+z$	$-x+z$
1	598	1601	600	500	898
2	600	1599	599	497	901
3	601	1602	602	501	901
4	599	1600	598	498	899

Решение.

Для каждого сочетания гирь определяем числовые характеристики: среднее арифметическое значение (3.17), дисперсию (3.14), а также статистический вес (8.15).

Для сочетания 1:

-среднее арифметическое значение:

$$\overline{(x+y)} = \frac{1}{4}(598 + 600 + 601 + 599) = 599,5 \text{ (г)}$$

-дисперсия:

$$D(x+y) = \frac{1}{4-1}((598-599,5)^2 + (600-599,5)^2 + (601-599,5)^2 + (599-599,5)^2) = 1,667 \text{ (г}^2\text{)}$$

$$\text{-вес: } p(x+y) = \frac{1}{D(x+y)} = \frac{1}{1,667} = 0,6 \left( \frac{1}{\text{г}^2} \right)$$

Результаты вычислений по всем сочетаниям представлены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Числовые характеристики результатов измерений сочетаний гирь

Сочетания гирь	1	2	3	4	5
Характеристика					
1 Среднее арифметическое значение, г	599,5	1600,5	599,75	499	899,75
2 Дисперсия, г <sup>2</sup>	1,667	1,667	2,917	3,333	2,25
3 Вес, 1/г <sup>2</sup>	0,6	0,6	0,343	0,3	0,444

Приводим систему из пяти условных уравнений (сочетаний гирь) к системе нормальных уравнений с учетом коэффициентов и весов, представленных в табл. 8.6.

Таблица 8.6

№ сочетания гирь	Коэффициенты													
	a	b	c	l	p	pa <sub>a</sub>	pa <sub>b</sub>	pa <sub>c</sub>	pb <sub>b</sub>	pb <sub>c</sub>	pc <sub>c</sub>	pa <sub>l</sub>	pb <sub>l</sub>	pc <sub>l</sub>
1	1	1	0	599,5	0,6	0,6	0,6	0	0,6	0	0	359,7	359,7	0
2	1	1	1	1600,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	960,3	960,3	960,3
3	1	-1	1	599,75	0,343	0,343	0,343	0,343	0,343	-0,343	0,343	205,71425	-205,71425	205,71425
4	0	-1	-1	499	0,3	0	0	0,3	0,3	-0,3	0,3	0	-149,7	149,7
5	-1	0	1	899,75	0,444	0,444	-0,444	0	0	0	0,444	-399,489	0	399,489
Суммы	'	'	'	'	'	[pa <sub>a</sub> ]	[pa <sub>b</sub> ]	[pa <sub>c</sub> ]	[pb <sub>b</sub> ]	[pb <sub>c</sub> ]	[pc <sub>c</sub> ]	[pa <sub>l</sub> ]	[pb <sub>l</sub> ]	[pc <sub>l</sub> ]
	'	'	'	'	'	1,987	0,857	-0,499	1,843	-0,043	1,687	1126,22525	964,58575	1715,20325

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 1,987x + 0,857y + 0,499z = 1126,22525 \\ 0,85770214x + 1,843y - 0,043z = 964,58575 \\ 0,499x - 0,043y + 1,687z = 1715,20325 \end{cases} \quad (8.24)$$

Решаем систему через определители. Главный определитель:

$$D = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = \quad (8.25)$$

$$= [pa\bar{a}] \cdot \begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} - [pab] \cdot \begin{vmatrix} [pab] & [pbc] \\ [pac] & [pcc] \end{vmatrix} + [pac] \cdot \begin{vmatrix} [pab] & [pbb] \\ [pac] & [pbc] \end{vmatrix}$$

$$D = 1,987 \cdot (1,843 \cdot 1,687 - 0,043^2) - 0,857 \cdot (0,857 \cdot 1,687 + 0,499 \cdot 0,043) + \\ + 0,499 \cdot (-0,857 \cdot 0,043 - 0,499 \cdot 1,843) = \\ = 6,174189204 - 1,257404112 - 0,477297492 = 4,4393876$$

Определители для нахождения искоемых величин:

$$D_a = \begin{vmatrix} [pal] & [pab] & [pac] \\ [pbl] & [pbb] & [pbc] \\ [pcl] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = [pal] \cdot \begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} - [pab] \cdot \begin{vmatrix} [pbl] & [pbc] \\ [pcl] & [pcc] \end{vmatrix} + [pac] \cdot \begin{vmatrix} [pbl] & [pbb] \\ [pcl] & [pbc] \end{vmatrix} \quad (8.26)$$

$$D_a = 1126,22525 \cdot (1,843 \cdot 1,687 - 0,043^2) - 0,857 \cdot (964,58575 \cdot 1,687 + 1715,20325 \cdot 0,043) + \\ + 0,499 \cdot (964,58575 \cdot (-0,043) - 1715,20325 \cdot 1,843) = \\ = 3499,51071 - 1457,765484 - 1598,095792 = 443,649434$$

$$D_b = \begin{vmatrix} [pa\bar{d}] & [pa] & [pa\bar{d}] \\ [pa\bar{b}] & [pb] & [pb\bar{d}] \\ [pa\bar{d}] & [pc] & [pc\bar{d}] \end{vmatrix} = [pa\bar{d}] \cdot \begin{vmatrix} [pb] & [pb\bar{d}] \\ [pc] & [pc\bar{d}] \end{vmatrix} - [pa] \cdot \begin{vmatrix} [pa\bar{b}] & [pb\bar{d}] \\ [pa\bar{d}] & [pc\bar{d}] \end{vmatrix} + [pa\bar{d}] \cdot \begin{vmatrix} [pa\bar{b}] & [pb] \\ [pa\bar{d}] & [pc] \end{vmatrix} \quad (8.27)$$

$$D_b = 1,987 \cdot (964,58575 \cdot 1,687 + 0,043 \cdot 1715,20325) - \\ - 1126,22525 \cdot (0,857 \cdot 1,687 + 0,499 \cdot 0,043) + \\ + 0,499 \cdot (0,857 \cdot 1715,20325 - 964,58575 \cdot 0,499) = \\ = 3379,906671 - 1652,415706 + 493,3118471 = 2220,802812$$

$$D_c = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pal] \\ [pab] & [pbb] & [pbl] \\ [pac] & [pbc] & [pcl] \end{bmatrix} = [paa] \cdot \begin{bmatrix} [pbb] & [pbl] \\ [pbc] & [pcl] \end{bmatrix} - [pab] \cdot \begin{bmatrix} [pab] & [pbl] \\ [pac] & [pcl] \end{bmatrix} + [pal] \cdot \begin{bmatrix} [pab] & [pbb] \\ [pac] & [pbc] \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

$$D_c = 1,987 \cdot (1,843 \cdot 1715,20325 + 0,043 \cdot 964,58575) - 0,857 \cdot (0,857 \cdot 1715,20325 - 0,499 \cdot 964,58575) + 1126,22525 \cdot (-0,857 \cdot 0,043) - 1,843 \cdot 0,499 = 6363,559796 - 847,2309679 - 1077,243461 = 4439,085367$$

Вычисляем оценки среднего искомым величин:

$$\tilde{x} = \frac{D_a}{D}; \quad \tilde{y} = \frac{D_b}{D}; \quad \tilde{z} = \frac{D_c}{D} \quad (8.29)$$

$$\tilde{x} = \frac{443,649434}{4,4394876} = 99,93257645 \quad (z);$$

$$\tilde{y} = \frac{2220,802812}{4,4394876} = 500,2385438 \quad (z);$$

$$\tilde{z} = \frac{4439,085367}{4,4394876} = 999,9093965 \quad (z)$$

Подставляем значения  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  и  $\tilde{z}$  в условные уравнения и определяем остаточные погрешности как расхождение левой и правой частей условных уравнений, как показано в табл. 8.7.

Вычисляем СКО остаточных погрешностей по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-m}} \quad (8.30)$$

где  $m$  – число искомым величин ( $m=3$ ).

$$S = \sqrt{\frac{1}{5-3} (0,67112025^2 + (-0,41948325)^2 + (-0,14657085)^2 + 0,6708527^2 + 0,22682005^2)} = \sqrt{\frac{1,149342281}{2}} = 0,758070669 \quad (z)$$

Таблица 8.7

## Определение остаточных погрешностей

Условные уравнения	Остаточные погрешности	
	Формула определения	Значение
$x + y = l_1$	$v_1 = \bar{l}_1 - \tilde{x} - \tilde{y}$	$v_1 = 99,93257645 + 500,2385438 - 599,5 = 0,67112025$
$x + y + z = l_2$	$v_2 = \bar{l}_2 - \tilde{x} - \tilde{y} - \tilde{z}$	$v_2 = 99,93257645 + 500,2385438 + 999,9093965 - 1600,5 = -0,41948325$
$x - y + z = l_3$	$v_3 = \bar{l}_3 - \tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{z}$	$v_3 = 99,93257645 - 500,2385438 + 999,9093965 - 599,75 = -0,14657085$
$-y + z = l_4$	$v_4 = \bar{l}_4 + \tilde{y} - \tilde{z}$	$v_4 = -500,2385438 + 999,9093965 - 499 = 0,6708527$
$-x + z = l_5$	$v_5 = \bar{l}_5 + \tilde{x} - \tilde{z}$	$v_5 = -99,93257645 + 999,9093965 - 899,75 = 0,22682005$

Рассчитываем алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = [pbb] \cdot [pcc] - [pbc]^2 \\
 D_{22} &= \begin{vmatrix} [paa] & [pac] \\ [pac] & [pcc] \end{vmatrix} = [paa] \cdot [pcc] - [pac]^2 \\
 D_{33} &= \begin{vmatrix} [paa] & [pab] \\ [pab] & [pbb] \end{vmatrix} = [paa] \cdot [pbb] - [pab]^2
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

$$D_{11} = 1,843 \cdot 1,687 - 0,043^2 = 3,107292; \quad D_{22} = 1,987 \cdot 1,687 - 0,499^2 = 3,103068;$$

$$D_{33} = 1,987 \cdot 1,843 - 0,857^2 = 2,927592$$

Рассчитываем СКО искомых величин:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} \cdot S ; S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} \cdot S ; S_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{D_{33}}{D}} \cdot S \quad (8.32)$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{3,107292}{4,4394876}} \cdot 0,758070669 = 0,634211778 \text{ (} \varepsilon \text{)};$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{3,103068}{4,4394876}} \cdot 0,758070669 = 0,633780563 \text{ (} \varepsilon \text{)};$$

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{2,927592}{4,4394876}} \cdot 0,758070669 = 0,615599907 \text{ (} \varepsilon \text{)}$$

Определяем доверительные интервалы для искомых величин. Коэффициент Стьюдента  $t_p$  для доверительной вероятности  $P = 0,95$  и числа степеней свободы  $f = n - m = 5 - 3 = 2$  равен 4,3:

$$99,93257645 - 2,92 \cdot 0,634211778 \leq X \leq 99,93257645 + 2,92 \cdot 0,634211778$$

$$98,08067806 \varepsilon \leq X \leq 101,7844748 \varepsilon ; 98,081 \varepsilon \leq X \leq 101,785 \varepsilon$$

$$500,2385438 - 2,92 \cdot 0,633780563 \leq Y \leq 500,2385438 + 2,92 \cdot 0,633780563$$

$$498,93879046 \varepsilon \leq Y \leq 502,089183 \varepsilon ; 498,388 \varepsilon \leq Y \leq 502,089 \varepsilon$$

$$999,9093965 - 2,92 \cdot 0,615599907 \leq Z \leq 999,9093965 + 2,92 \cdot 0,615599907$$

$$998,1118448 \varepsilon \leq Z \leq 1001,706948 \varepsilon ; 998,112 \varepsilon \leq Z \leq 1001,707 \varepsilon$$

#### 8.4. Задачи

В задачах 8.3.1 – 8.3.16 определите вид измерений.

**Задача 8.4.1.** Получите результат многократных измерений освещенности рабочего места в форме доверительного интервала с вероятностью 0,98, проведя статистическую обработку данных, представленных в таблице 8.8, учитывая, что систематическая погрешность отсутствует.

Таблица 8.8

## Результаты измерений освещенности

Освещенность, лк	370	374	376	379	380	384	386	390	392
Число результатов, $m_i$	1	2	5	8	14	10	7	4	1

**Задача 8.4.2.** После измерения мощности партии электроламп получены результаты, представленные в табл. 8.9. Определите с надежностью 0,90 интервал, в котором находится значение мощности, а также вероятность того, что мощность лампы превысит 46 Вт. Систематические погрешности отсутствуют.

Таблица 8.9

## Результаты измерения мощности электроламп

Интервалы значений мощности	34;36	36;38	38;40	40;42	42;44	44;46	46;48
Число результатов измерений $m_i$	2	6	12	24	18	8	3

**Задача 8.4.3.** Оцените результат измерений веса банок консервов в форме доверительного интервала с вероятностью 0,98 по данным, приведенным в таблице 8.10. Определите, находится ли результат многократных измерений в пределах поля допуска ( $400 \pm 20$ ) г.

Таблица 8.10

## Результаты измерений веса банок

Вес, г	372	375	384	390	405	410	415	426
Число банок, $m_i$	1	2	8	12	14	7	4	2

**Задача 8.4.4.** Определите с вероятностью 0,95 общее сопротивление электрической цепи, состоящее из внутреннего сопротивления источника  $r$  и активных сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  последовательно соединенных электрических элементов, измеренных по отдельности. Результаты измерений, из которых исключены систематические и грубые погрешности, распределены по нормальному закону и приведены в табл. 8.11.

Таблица 8.11

## Результаты измерений сопротивлений, Ом

№ измерения \ Сопротивление	r	R1	R2	R3
1	4,8	9,5	18,6	29,5
2	4,6	9,8	19,8	29,8
3	5,0	10,1	20,1	30,2
4	5,2	10,5	19,9	30,0
5	5,4	10,1	20,2	30,1
6	4,9	10,4	20,3	29,7
7	5,3	9,9	20,0	29,4
8	5,6	9,7	19,7	30,5
9	5,1	10,0	19,8	30,2
10	4,8	9,9	20,1	29,9

**Задача 8.4.5.** Многократно измерено давление в двух емкостях с газом (табл. 8.12). Вместимость одной емкости  $v_1 = 3$  л, второго  $v_2 = 4$  л. Определите давление газа в емкостях с вероятностью 0,98, если их соединить между собой. Температура в емкостях одинакова и постоянна. Результаты измерений подчиняются нормальному закону; систематические и грубые погрешности исключены.

Таблица 8.12

## Результаты измерений давления в сосудах

№ измерения \ № емкости	Емкость 1, кПа	Емкость 2, кПа
1	200,82	402,2
2	204,46	404,6
3	202,65	405,3
4	202,08	400,4
5	199,88	398,8
6	201,24	403,9

**Задача 8.4.6.** Определите массу меди и серебра в бруске их сплава по показаниям динамометра, к которому подвешен брусок в воздухе и воде, приведенным в табл. 8.13. Выталкиваю-

щей силой воздуха можно пренебречь. Плотности серебра и меди соответственно равны  $\rho_c = 10,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $\rho_m = 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Результаты измерений не содержат систематических и грубых погрешностей и подчинены нормальному закону. Доверительная вероятность  $P = 0,95$ .

Таблица 8.13

Показания динамометра

№ измерения	Показания динамометра, Н	
	в воздухе	в воде
1	2,28	2,19
2	2,36	2,12
3	2,41	2,17
4	2,44	2,16
5	2,40	2,20
6	2,39	2,19

**Задача 8.4.7.** Определите с доверительной вероятностью  $P=0,98$  скорость автомобиля через 10 мин, если измерены его начальная скорость и ускорение движения, приведенные в таблице 8.14. Результаты измерений не содержат систематические и грубые погрешности и подчинены нормальному закону.

Таблица 8.14

Результаты измерений параметров движения автомобиля

№ измерения	Скорость, км/ч	Ускорение, м/с <sup>2</sup>
1	28	0,028
2	27	0,030
3	29	0,035
4	32	0,026
5	34	0,024
6	31	0,032
7	30	0,034
8	29	0,029

**Задача 8.4.8.** Определите с вероятностью 0,98 силу тока и потребляемую мощность утюга ( в электрической цепи) по результатам измерения напряжения и сопротивления, приведенным в таблице 8.15. Систематические и грубые погрешности исключены. Результаты измерений подчиняются нормальному закону.

Таблица 8.15

Результаты измерений параметров электрической цепи

№ измерения	Напряжение U, В	Сопротивление R, Ом
1	218	48,5
2	220	48,8
3	216	49,6
4	222	50,0
5	225	50,1
6	219	51,2
7	221	49,8

**Задача 8.4.9.** Определите плотность твердого тела, если получены результаты измерений (табл. 8.16).

Таблица 8.16

Результаты измерений твердого тела

№ измерения	Масса тела m, г	Объем $V$ , см <sup>3</sup>
1	3230	1790
2	3242	1795
3	3235	1806
4	3240	1800
5	3250	1810
6	3238	1798
7	3244	1805
8	3246	1792

**Задача 8.4.10.** Определите с вероятностью 0,99 к.п.д. источника тока с внутренним сопротивлением  $r$ , если он работает на нагрузку с сопротивлением  $R$ . Результаты измерений сопротивлений приведены в табл. 8.17, подчиняются нормальному распределению, и из них исключены систематические и грубые погрешности.

Таблица 8.17

Результаты измерений сопротивлений

№ измерения	Сила тока I, А	Мощность P, кВт
1	9,9	1,5
2	9,7	1,8
3	10,1	2,1
4	10,0	2,0
5	9,8	2,2
6	10,2	1,9
7	9,6	2,15

**Задача 8.4.11.** Определите мощность СВЧ-печи ( $x$ ), телевизора ( $y$ ) и холодильника ( $z$ ), если с помощью секундомера и электросчетчика получены значения потребленной энергии, а затем и мощности при работе различных совокупностей этих электроприборов. Обработанные значения приведены в таблице 8.18.

Таблица 8.18

Значения мощности в совокупных измерениях

Сочетания № измерения	1	2	3	4
	$x+y=l_1$	$x+z=l_2$	$y+z=l_3$	$x+y+z=l_4$
1	550,2	566	314,6	715,6
2	548,8	565,8	316,7	714,4
3	550,5	565,0	316,2	715,2
4	549,2	564,4	315,5	716,0
5	551	564,9	315,8	714,7

**Задача 8.4.12.** В электрической цепи, состоящей из источника тока с известным значением э.д.с.  $E$ , последовательно соединенных элементов с сопротивлениями  $R_1, R_2, R_3$ , измерялись значения активных сопротивлений  $r, R_1, R_2, R_3$ .

Результаты измерений получены измерением силы тока в цепи при замещении одного или двух сопротивлений эталонным сопротивлением  $r$ . Экспериментальные данные, приведенные в табл. 8.19, подчиняются нормальному закону распределения, из них исключены систематические и грубые погрешности.

Таблица 8.19

## Результаты измерений сопротивлений

Сочетание № изме- рения	1	2	3	4	5
	$R1=l_1$	$R3=l_2$	$R1+R2=l_3$	$R2+R3=l_4$	$R1+R2+R3=l_5$
1	4,8	10,2	14,7	30,1	35,1
2	5,2	10,6	15,1	29,6	34,6
3	5,5	9,9	14,9	31	35,4
4	4,6	10,1	15,2	29,8	34,9

**Задача 8.4.13.** Определите наибольшие значения погрешностей  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , вызываемых изменениями климатических факторов: температуры, давления, относительной влажности, соответственно, в установленных пределах. Значения суммарной случайной погрешности измерений линейного размера на предельно допустимых уровнях влияющих факторов подчиняются нормальному распределению, не содержат систематических и грубых погрешностей и приведены в таблице 8.20.

Таблица 8.20

## Результаты определения суммарной погрешности, мкм

Соче- тания № изме- рения	1	2	3	4	5	6
	$-\Delta x - \Delta y - \Delta z = l_1$	$\Delta x + \Delta y + \Delta z = l_2$	$\Delta x - \Delta y - \Delta z = l_3$	$\Delta x + \Delta y - \Delta z = l_4$	$-\Delta x - \Delta y + \Delta z = l_5$	$-\Delta x + \Delta y + \Delta z = l_6$
1	-7,3	7,2	2,2	3,4	-3,9	-2,1
2	-7,8	7,5	2,4	3,5	-3,1	-2,6
3	-7,5	7,3	2,3	3,1	-3,4	-2,5
4	-7,2	7,7	2,5	3,7	-3,6	-2,2
5	-7,1	7,6	2,1	3,6	-3,5	-2,4
6	-7,4	7,9	2,7	3,3	-3,3	-2,7

**Задача 8.4.14.** При исследовании зависимости сопротивления  $R$  металлической проволоки от температуры  $T$  получены экспериментальные пары значений в виде «температура-

сопротивление» (таблица 8.21). Найдите значения сопротивления проводника при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  –  $R_0$  и температурного коэффициента сопротивления –  $\alpha$  в зависимости:

$$R = R_0(1 + \alpha \cdot T) \quad * \quad (8.33)$$

Оцените точность полученных результатов.

Таблица 8.2.1

Результаты измерений электрического сопротивления

Температура $T, \text{ }^{\circ}\text{C}$	4	9	14	19	24	30	34	42	46	50	53	55
Сопротивление $R, \text{ Ом}$	86,4	88,1	89,8	91,5	93,0	95,2	96,6	99,3	100,6	102,0	103,0	104,0

\*Рекомендации: Для составления условных уравнений  $a_i = 1$ ,  $x = R_0$ ,  $y = \alpha \cdot R_0$ ,  $b_i = T$ ,  $l_i = R$ . Уравнения равнозначны.

**Задача 8.4.15.** Важную роль в авиастроении и при проектировании крупных сооружений, например мостов, играет флаттер. Это произвольно возникающие вибрации крыла или хвостового оперения самолета или элементов конструкции, которые могут вызвать разрушение. Проведен эксперимент с латунной пленкой (толщиной 3 мкм и шириной 12 мм) на трех уровнях длины и трех значениях скорости ветра (табл. 8.22).

Определите зависимость флаттера  $F$  – числа колебаний в минуту вида

$$F = \alpha + \beta_1 \cdot L + \beta_2 \cdot v \quad *, \quad (8.34)$$

где  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  – коэффициенты;  $L$  – длина пленки;  $v$  – скорость ветра.

Таблица 8.22

Результаты эксперимента по определению флаттера  $F$ , колебаний/мин.

Длина пленки, мм Скорость ветра $V$ , м/с	44,5	51	58
	20	3740 3760 3810	3470 3410 3520
17	3340 3250 3230	3100 3020 3150	2850 2800 2820
14	2560 2730 2640	2520 2430 2640	2340 2270 2290

\*Рекомендации: Принять

$$a_i = 1, \quad x = \alpha, \quad b_i = L, \quad y = \beta_1, \quad c_i = v, \quad z = \beta_2$$

Проверить, равноточны ли результаты измерений.

**Задача 8.4.16.** Определите длину алюминиевого стержня при  $0^\circ\text{C}$  и коэффициент линейного расширения алюминия  $\alpha$  по зависимости:

$$l = l_0 + (1 + \alpha \cdot \Delta T), \quad (8.35)$$

где  $l$  – длина стержня при изменении температуры на  $\Delta T$ .

Результаты измерений длины стержня  $l$  при разности температур  $\Delta T$  приведены в табл. 8.23.

Таблица 8.23

Результаты эксперимента по определению характеристик стержня из алюминия

Изменение температуры $\Delta T$ , °C	12	25	50	100	130	150	200	220
Длина стержня $l$ , мм	150,043	150,098	150,182	150,364	150,470	150,538	150,700	150,790

**Задача 8.4.17.** Классифицируйте измерения: а) силы электрического тока с помощью амперметра прямого включения; б) сопротивления в электрической цепи методом «амперметра-вольтметра» с использованием закона Ома.

**Задача 8.4.18.** Температура в печи при термообработке детали контролируется термопарой с фиксацией результатов измерения самописцем. Классифицируйте измерения при поддержании необходимой температуры в печи.

**Задача 8.4.19.** При определении температурного коэффициента (ТКС) для пленочного резистора измеряют его электрическое сопротивление при определенной температуре. В итоге получают систему уравнений. В результате каких измерений получают значение ТКС?

**Задача 8.4.20.** В каком случае метод измерения массы путем сравнения с мерой будет нулевым, а в каком – дифференциальным?

**Задача 8.4.21.** Метод устранения погрешности из-за неравноточности двухчашечных весов предполагает одно взвешивание, при котором на одну чашку помещается взвешиваемый груз, а на другую – уравновешивающие гири, затем второе взвешивание, при котором взвешиваемый груз и гири меняют местами и добиваются уравновешивания добавлением (убавлением) гирь.

Определите метод устранения погрешности и составьте уравнение взвешивания.

**Задача 8.4.22.** Классифицируйте методы измерений давления с помощью приборов, схемы которых приведены на рис. 8.1

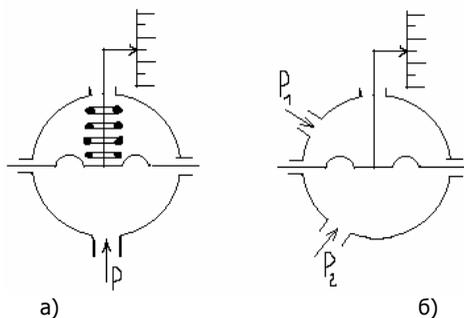


Рис. 8.1. Схемы измерений давления

**Задача 8.4.23.** При измерении индуктивности катушки методом «вольтметра-амперметра» (рис. 8.2), обладающей активным сопротивлением 30 Ом, показания приборов оказались соответственно равны 5 В и 100 мкА. Определите вид измерений и значение индуктивности  $L$  при условии, что измерения проводились при частоте 50 Гц.

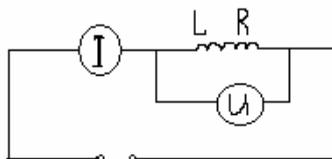


Рис. 8.2. Схема измерений индуктивности

**Задача 8.4.24.** На рис. 8.3 приведены схемы для измерения сопротивления  $R_x$  с помощью амперметра и вольтметра. Классифицируйте измерения и напишите выражения для определения  $R_x$ .

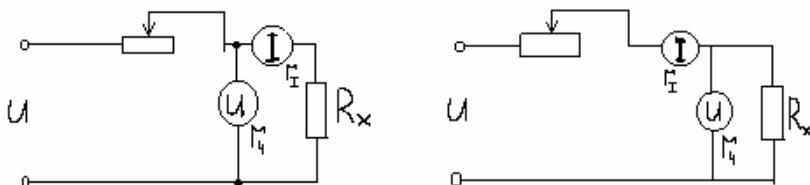


Рис. 8.3. Схемы измерений сопротивления

**Задача 8.4.25.** При измерении электрической емкости методом «вольтметра-амперметра» (рисунок 8.4) на частоте 50 Гц вольтметр дал показание 125 В, а миллиамперметр 50 мА. Классифицируйте измерения и определите измеряемую емкость.

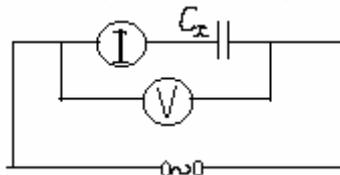
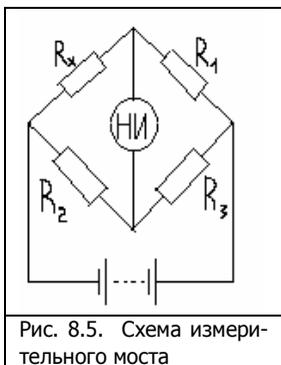


Рис. 8.4. Схема измерения емкости

**Задача 8.4.26.** Как с помощью амперметра, вольтметра и ваттметра измерить сопротивление на переменном токе? Приведите возможные схемы измерений и классифицируйте измерения.

**Задача 8.4.27.** Сопротивление  $R_x$  измеряют с помощью равноплечного моста (рисунок 8.5), в котором каждое из плеч  $R_2$  и  $R_3$  равно 500 Ом. Равновесие достигается при  $R_1' = 500,6$  Ом. После перемены местами  $R_x$  и  $R_1$ , равновесие моста достигается при  $R_1'' = 500,4$  Ом.

Определите метод измерений, значение  $R_x$  и действительное соотношение плеч моста.



НИ – нуль-индикатор

Рис. 8.5. Схема измерительного моста

**Задача 8.4.28.** Как определить сопротивление электролампы в бытовых условиях, не имея омметра? Как это выполнить, если нет возможности отключить всех потребителей? Классифицируйте измерения.

**Задача 8.4.29.** Как без помощи ваттметра определить мощность, потребляемую телевизором? Классифицируйте измерения.

**Задача 8.4.30.** Одна из задач средневековья гласит: у двух рыцарей был 16 – литровый сосуд, наполненный вином и два пустых сосуда – 6 и 10-литровый. Как рыцарям разделить вино поровну, используя для перемешивания только три указанных сосуда? Какое минимальное число измерений при этом потребует? Классифицируйте метод измерений.

## 9. ГРУППЫ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 9.1. Основные положения

При проведении измерений параметра, особенно в течение длительного времени, меняются условия измерений, часто возникает необходимость в смене операторов, замене средств измерений. Это приводит к разной точности результатов измерений. На точность результатов будет также влиять число измерений.

Для получения единого результата таких групп измерений необходимо чтобы:

- границы не исключенных систематических погрешностей в группах результатов измерений были одинаковы;
- группы результатов измерений были однородны.

Порядок систематической обработки однородных групп результатов измерений зависит от их равноточности. Если группы равноточны, то они обрабатываются как единая совокупность результатов измерений, как показано в главе 8. Если группы неравноточны, то для каждой из них вводится дополнительная характеристика – статистический вес, с учётом которого проводится дальнейшая обработка результатов измерений. Проверку однородности и равноточности групп можно выполнить по критериям, представленным в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Критерии для проверки групп результатов измерений

Распределение данных групп		По нормальному закону		По закону, отличному от нормального	
		2	≥3	2	≥3
П Р О В Е Р К А	однородности	Стьюдента	Фишера	Уилкоксона	$\chi^2$
	равноточности	Фишера	Бартлетта	Сиджела-Тьюки	Сиджела-Тьюки (группы попарно)

Рассмотрим порядок проверки групп с помощью перечисленных критериев.

Критерий Стьюдента оценивает допустимость различия средних арифметических значений  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  в группах. Это различие считается допустимым, если выполняется неравенство:

$$\frac{|\bar{A}_1 - \bar{A}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \leq t_p \quad (9.1)$$

где  $S_1, S_2$  – дисперсии в группах;

$n_1, n_2$  – объёмы групп;

$t_p$  – коэффициент Стьюдента (приложение А) для заданной доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $f = n_1 + n_2 - 2$ .

Критерий Фишера оценивает допустимость расхождения дисперсий групп.

Две группы считаются равнозначными, если выполняется неравенство:

$$\frac{1}{F_{\frac{q}{2}}} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{\frac{q}{2}}, \quad (9.2)$$

где  $F_q$  – значение критерия Фишера (приложение К) для уровня

значимости  $\frac{q}{2}$  и числа степенной свободы  $\nu_1 = n_1 - 1, \nu_2 = n_2 - 1$ .

Для оценки однородности нескольких (более двух) групп рассчитывают:

- межгрупповую дисперсию:

$$S_M^2 = \frac{1}{L - 1} \sum_{j=1}^L n_j (\bar{A}_j - \bar{\bar{A}})^2, \quad (9.3)$$

где  $L$  – число групп;

$n_j$  – объём  $j$ -й группы;

$\bar{A}_j$  – среднее арифметическое значение результатов измерений в j-й группе;

$\bar{\bar{A}}$  – среднее арифметическое значение по всем группам:

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^L n_j \bar{A}_j, \quad (9.4)$$

где N – общее число результатов измерений:

$$N = \sum_{j=1}^L n_j; \quad (9.5)$$

- внутригрупповую дисперсию:

$$S_B^2 = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L (n_j - 1) S_j^2 \quad (9.6)$$

Группы считаются однородными, если выполняется неравенство:

$$\frac{1}{F_{\frac{q}{2}}} \leq \frac{S_M^2}{S_B^2} \leq F_{\frac{q}{2}}, \quad (9.7)$$

где  $F_{\frac{q}{2}}$  – значение критерия Фишера для уровня значимости  $\frac{q}{2}$  и

числа степеней свободы  $\nu_1 = L - 1$  и  $\nu_2 = N - L$ .

Критерий Бартлетта оценивает равнозначность групп по соотношениям внутригрупповой дисперсии с дисперсией в группах, которые определяют значение  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \frac{2,303}{c} \sum_{j=1}^L (n_j - 1) \lg \frac{S_B^2}{S_j^2}, \quad (9.8)$$

где 
$$c = 1 + \frac{1}{3(L-1)} \left( \sum_{j=1}^L \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N-L} \right), \quad (9.9)$$

$c=1$ , если во всех группах  $n_j \geq 30$ .

Группы становятся равноточными, если  $\chi^2 \leq \chi_q^2$ , где  $\chi_q^2$  - табличное значение  $\chi^2$  (приложение Е) для уровня значимости  $q$  и числа степеней свободы  $f=L-1$ .

Для групп, в которых результаты измерений не подчиняются нормальному закону, применяются непараметрические (ранговые) критерии.

Критерий Уилкоксона оценивает расхождение средних арифметических значений групп по суммарному рангу результатов измерений в группе меньшего объёма:

$$T = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (9.10)$$

где  $R_i$  – ранги (порядковые номера) результатов измерений группы меньшего объёма в вариационном ряду, включающем результаты измерений обеих групп.

Группы считаются однородными, если выполняется неравенство:

$$T_{q-} < T < T_{q+}, \quad (9.11)$$

где 
$$T_{q-} = \frac{m(n+m+1)}{2} - t_{\frac{P}{2}} \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot (n+m+1)}{12}}; \quad (9.12)$$

$$T_{q+} = \frac{m(n+m+1)}{2} + t_{\frac{P}{2}} \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot (n+m+1)}{12}}, \quad (9.13)$$

где  $n$  – объём меньшей группы;

$m$  – объём большей группы;

$t_{\frac{P}{2}}$  – квантиль функции Лапласа для значения функции  $\frac{P}{2}$ ;

$P$  – доверительная вероятность.

Для групп малых объёмов ( $n+m \leq 30$ ) значения  $T$  табулированы (приложение Л).

Критерий Сиджела-Тьюки проверяет допустимость различия рассеяния результатов по группам по условию: если выполняется неравенство (9.11), то группы считаются равнозначными. Предельные значения определяются по формулам (9.12) и (9.13). Для подсчёта T по формуле (9.10) ранги в вариационном ряду присваиваются в следующем порядке: 1- наименьшему значению, 2 - наибольшему, 3 - предыдущему перед наибольшим значением, 4 - второму после наименьшего значения, 5 - третьему после наименьшего значения, 6 - третьему перед наибольшим значением и т. п.

Критерий  $\chi^2$  предусматривает группирование экспериментальных данных по одной и той же системе. Например, системе из r интервалов, как показано в таблице 9.2.

Таблица 9.2

Схема упорядочения данных для критерия  $\chi^2$

Интервалы	Группа данных	Сумма по строкам
	1,.....,j,.....,L	
1	$n_{11}, \dots, n_{1j}, \dots, n_{1L}$	$n'_1$
.	.	
.	.	
i	$n_{i1}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{iL}$	$n'_i$
.	.	
.	.	
r	$n_{r1}, \dots, n_{rj}, \dots, n_{rL}$	$n'_r$
Объёмы групп	$n_1, \dots, n_j, \dots, n_L$	$N = \sum_{i=1}^r n_i$

$n_{ij}$  – число значений из j-той группы, попавших в i-тый интервал;

$n'_i = \sum_{j=1}^L n_{ij}$  – общее число данных, попавших в i-тый интервал.

Интервалы группировки принимают одинаковыми (кроме крайних). Число интервалов рекомендуется принимать равным:  $r = 8...12$  при  $N = 100...2000$ ,  $r = 10...15$  при  $N = 200...500$ .

Рассчитывают  $\chi^2$  по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^L \frac{\left( n_{ij} - n_j \cdot \frac{n'_i}{N} \right)^2}{n_j \cdot \frac{n'_i}{N}}. \quad (9.14)$$

Группы считаются однородными, если  $\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2$ , где  $\chi_{\alpha}^2$  - табличное значение  $\chi^2$  (приложение Е) для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы:

$$f = (r - 1) \cdot (L - 1). \quad (9.15)$$

Порядок статистической обработки однородных групп результатов измерений представлен в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Определение результата групп измерений

Группы Характеристики		Равноточные		Неравноточные
		Разных объёмов	Одинаковых объёмов	
1	2	3	4	5
Для каждой группы	Среднее арифметическое	$A_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} A_{ij} \quad (9.16.)$		
	СКО	$S_j = \sqrt{\frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (A_{ij} - \bar{A}_j)^2} \quad (9.17.)$		

Окончание таблицы

1	2	3	4	5
	Статистический вес	-		$P_j = \frac{n_j}{S_j^2}$ (9.18.)
Общие по группам	Среднее арифметическое	$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^L n_j \cdot A_j$ (9.19.)	$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \bar{A}_j$ (9.20.)	$\bar{\bar{A}} = \frac{\sum_{j=1}^L A_j \cdot P_j}{\sum_{j=1}^L P_j}$ (9.21.)
	СКО среднего арифметического	$S(\bar{\bar{A}}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{j=1}^L (n_j - 1)S_j^2 + \sum_{j=1}^L n_j (\bar{A}_j - \bar{\bar{A}})^2}$ (9.22.)	$S(\bar{\bar{A}}) = \sqrt{\frac{n-1}{N(N-1)} \cdot \sum_{j=1}^L S_j^2 + \frac{1}{L(N-1)} \cdot \sum_{j=1}^L (\bar{A}_j - \bar{\bar{A}})^2}$ (9.23.)	$S(\bar{\bar{A}}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^L (\bar{A}_j - \bar{\bar{A}})^2 P_j}{L(L-1) \sum_{j=1}^L P_j}}$ (9.24.)
	Число степеней свободы для коэффициента Стьюдента $t_p$ (приложение А)	$f = N - L$ (9.26.)		$f = (n_{\min}^* - 1)$ (9.27.)
	Доверительный интервал	$\bar{\bar{A}} - t_p \cdot S(\bar{\bar{A}}) \leq A \leq \bar{\bar{A}} + t_p \cdot S(\bar{\bar{A}})$ (9.25.)		

\* $n_{\min}$  – объём наименьшей группы.

## 9.2. Вопросы для самопроверки

1. Какие факторы могут влиять на точность измерений?
2. Какие требования должны выполняться для обеспечения возможности совместной обработки групп результатов измерений?
3. Какие результаты измерений можно рассматривать как однородные?
4. По какой характеристике определяется точность результатов измерений?
5. Что характеризует статистический вес?
6. Какими критериями можно проверить: а) однородность групп результатов измерений; б) их равноточность?
7. Какие из критериев относятся: а) к параметрическим; б) к непараметрическим?
8. Что оценивается с помощью: а) внутригрупповой дисперсии; б) межгрупповой дисперсии?
9. Что является вариационным рядом?
10. Что такое «ранг»?
11. Приведите алгоритмы расчета результата однородных групп измерений: а) равноточных; б) неравноточных.

## 9.3. Примеры решения задач

**Задача 9.3.1.** Определите с доверительной вероятностью  $P=0,95$  значение электрического сопротивления по двум сериям нормально распределенных результатов измерений (табл. 9.4), из которых исключены систематические и грубые погрешности.

Таблица 9.4

## Результаты измерений электрического сопротивления

№ измерения	Электрическое сопротивление R, Ом	
	Серия 1	Серия 2
1	12,06	12,01
2	12,02	12,00
3	11,99	11,96
4	11,98	11,97
5	12,03	11,93
6	12,05	12,02
7	12,04	12,08
8	11,89	12,06
9	11,95	11,95
10	12,08	12,04

Решение.

Рассчитываем для каждой группы результатов измерений (серий) среднее арифметическое значение (3.17.) и СКО (3.18.).

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{10} (12,06 + 12,02 + 11,99 + 11,98 + 12,03 + 12,05 + 12,04 + 11,89 + 11,95 + 12,08) = 12,009 \text{ (Ом)}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{10-1} \left( (12,06 - 12,009)^2 + (12,02 - 12,009)^2 + (11,99 - 12,009)^2 + (11,98 - 12,009)^2 + (12,03 - 12,009)^2 \right) + \frac{1}{10-1} \left( (12,05 - 12,009)^2 + (12,04 - 12,009)^2 + (11,89 - 12,009)^2 + (11,95 - 12,009)^2 + (12,08 - 12,009)^2 \right)^2} = 0,057435954 \text{ (Ом)}$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{10} (12,01 + 12 + 11,96 + 11,97 + 11,93 + 12,02 + 12,08 + 12,06 + 11,95 + 12,04) = 12,002 \text{ (Ом)}$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{1}{10-1} \left( (12,01 - 12,002)^2 + (12 - 12,002)^2 + (11,96 - 12,002)^2 + (11,97 - 12,002)^2 + (11,93 - 12,002)^2 \right)^2 + \frac{1}{10-1} \left( (12,02 - 12,002)^2 + (12,08 - 12,002)^2 + (12,06 - 12,002)^2 + (11,95 - 12,002)^2 + (12,04 - 12,002)^2 \right)^2} = 0,049396356 \text{ (Ом)}$$

Проверяем однородность групп по критерию Стьюдента (9.1.):

$$\frac{|12,009 - 12,002|}{\sqrt{(10-1) \cdot 0,057435954^2 + (10-1) \cdot 0,0493996356^2}} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot (10+10-2)}{10+10}} =$$

$$= \frac{0,007}{3 \cdot \sqrt{0,005738888}} \cdot 10,48808848 = \frac{0,007}{0,227266361} \cdot 10,48808848 = 0,323042174$$

Коэффициент Стьюдента для  $P=0,95$  и  $f=10+10-2=18$   
 $t_p = 2,1$  (приложение А).

$0,323 < 2,1$ , следовательно, группы являются однородными.

Проверяем равнозначность групп:

Предельные значения по приложению К для вероятности

$$P = 1 - 0,5 + \frac{0,95}{2} = 0,975:$$

$$F_{\frac{q}{2}} = 4,03, \quad \frac{1}{F_{\frac{q}{2}}} = \frac{1}{4,03} = 0,248138957$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \left( \frac{0,057435954}{0,0493996356} \right)^2 = 1,352003619$$

$$0,248139 < 1,352 < 4,03.$$

Следовательно, неравенство (9.2.) выполняется, и группы являются равнозначными. Результаты измерений обрабатываем как единую совокупность данных.

Общее среднее арифметическое (9.20.):

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{R}_1 + \bar{R}_2) = \frac{1}{2}(12,009 + 12,002) = 12,0055 \text{ (см)}$$

СКО результатов измерений (9.23):

$$S(\bar{A}) = \sqrt{\frac{9}{20 \cdot (20-1)} \cdot (0,057435954^2 + 0,049396356^2) + \frac{1}{20 \cdot (20-1)} \cdot ((12,009 - 12,0055)^2 + (12,002 - 12,0055)^2)} =$$

$$= \sqrt{0,02368421 \cdot 0,005738888 + 0,026315789 \cdot 0,0000245} = \sqrt{0,000135921 + 0,000000644} =$$

$$= \sqrt{0,000136565} = 0,011686134 \text{ (Ом)}$$

Коэффициент Стьюдента для  $P=0,95$  и  $f=20-2=18$  –  $t_p = 2,1$  (приложение А).

Рассчитываем доверительный интервал (9.25.):

$$12,0055 - 2,1 \cdot 0,011686134 \leq A \leq 12,0055 + 2,1 \cdot 0,011686134.$$

$$11,98095912 \text{ Ом} \leq A \leq 12,03004088 \text{ Ом}$$

$$11,981 \text{ Ом} \leq A \leq 12,030 \text{ Ом}$$

**Задача 9.3.2.** Определите с вероятностью 0,98 , диаметр отверстия детали по результатам многократных измерений тремя приборами – штангенциркулем, индикаторным нутромером, инструментальным микроскопом, указанным в табл. 9.5 и подчиняющихся нормальному закону распределения вероятностей.

Таблица 9.5

Результаты измерений диаметра отверстия

№ измерения	Результаты измерений, мм, по группам, полученным средствами измерений:		
	штангельциркуль, $L_1$	индикаторный нутромер, $L_2$	инструментальный микроскоп, $L_3$
1	18,15	28,12	28,135
2	28,05	28,01	28,005
3	27,95	27,99	27,995
4	28,10	27,98	28,015
5	28,00	28,08	27,985
6	27,90	28,06	28,125
7	28,05	28,02	
8	28,10	27,97	
9	28,05		
10	27,85		

Решение.

Рассчитываем для каждой группы результатов измерений среднее арифметическое значение (3.17) и СКО (3.18):

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{10-1} \left( (28,15-28,035)^2 + (28,05-28,035)^2 + (27,95-28,035)^2 + (28,1-28,035)^2 + (28-28,035)^2 + (27,9-28,035)^2 \right) +$$

$$\sqrt{\frac{1}{10-1} \left( (28,05-28,035)^2 + (28,1-28,035)^2 + (28,05-28,035)^2 + (28-28,035)^2 \right) =$$

$$+ 0,094868329 \text{ (мм)}$$

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{8} (28,12 + 28,01 + 27,99 + 27,98 + 28,08 + 28,06 + 28,02 + 27,97) =$$

$$= 28,02875 \text{ (мм)}$$

$$S_2 = 0,053033008 \text{ (мм)}$$

$$D_3 = \frac{1}{6} (28,135 + 28,005 + 27,995 + 28,015 + 27,985 + 28,125) =$$

$$= 28,04333333 \text{ (мм)}$$

$$S_3 = 0,067946058 \text{ (мм)}$$

Проверяем однородность групп по критерию Фишера. Рассчитываем:

- среднее арифметическое значение по всем группам (9.4):

$$\bar{D} = \frac{1}{10+8+6} (10 \cdot 28,02 + 8 \cdot 28,02875 + 6 \cdot 28,04333333) = \frac{1}{24} \cdot 672,69 = 28,02875 \text{ (мм)}$$

- межгрупповую дисперсию (9.3):

$$S_m^2 = \frac{1}{3-1} \cdot (10 \cdot (28,02 - 28,02875)^2 + 8 \cdot (28,02875 - 28,02875)^2 + 6 \cdot (28,04333333 - 28,02875)^2) =$$
$$= 0,001020833 \text{ (мм}^2\text{)}$$

внутригрупповую дисперсию:

$$S_B^2 = \frac{1}{24-3} \cdot \left( (10-1) \cdot 0,094868329^2 + (8-1) \cdot 0,053033008^2 + (6-1) \cdot 0,067946058^2 \right)$$

Проверяем неравенство (9.7):

$$\frac{S_M^2}{S_B^2} = \frac{0,001020833}{0,005893849} = 0,1732031210$$

Число степеней свободы  $f_1 = L - 1 = 2$  и

$$f_2 = N - L = 24 - 3 = 21.$$

Значение критерия Фишера для

$$\frac{q}{2} = 0,01 - F_{q/2} = 5,78 \text{ (приложение К).}$$

$$\frac{1}{F_{q/2}} = \frac{1}{5,78} = 0,17301038$$

Неравенство (9.7) выполняется:

$$0,17301038 < 0,173203121 < 5,78.$$

Следовательно, результаты измерений по группам являются однородными.

Проверяем равнозначность групп по критерию Бартлетта.

Рассчитываем коэффициент с (9.9):

$$c = 1 + \frac{1}{3 \cdot (3-1)} \cdot \left( \frac{1}{10-1} + \frac{1}{8-1} + \frac{1}{6-1} + \frac{1}{24-3} \right) = 1,067724868$$

Рассчитываем  $\chi^2$  (9.8):

$$\chi^2 = \frac{2,303}{1,067724868} \cdot \left( (10-1) \cdot \lg \frac{0,005893849}{0,094868329^2} + (8-1) \cdot \lg \frac{0,05893849}{0,053033008^2} + (6-1) \cdot \lg \frac{0,05893849}{0,067946058^2} \right) = 2,42633589$$

Табличное значение  $\chi^2$  для уровня значимости  $q = 1-P = 1-0,98=0,02$  и числа степеней свободы  $f=L-1=3-1=2$  по приложению Е.

$$x^2 = \frac{2.303}{1.067724868} \cdot \left( (10-1) \cdot \lg \frac{0.005893849}{0.094868329^2} + (8-1) \cdot \lg \frac{0.005893849}{0.053033008^2} + (6-1) \cdot \lg \frac{0.005893849}{0.067946058} \right) = 2.42633589$$

$$\chi^2 = 7,38$$

Критерий Бартлетта выполняется:

$$2,426 < 7,38,$$

и группы результатов измерений являются равноточными.

Рассчитываем СКО среднего общее по группам (9.22).

Формулу (9.22) можно записать в виде:

$$S = (\bar{A}) = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot (S_B^2 \cdot (N-L) + S_M^2 \cdot (L-1))} \quad (9.28)$$

$$S(\bar{A}) = \sqrt{\frac{1}{24 \cdot (24-1)} \cdot (0,005893849 \cdot (24-3) + 0,001020833 \cdot (3-1))} = 0,015097058 \text{ (мм)}$$

Коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $P=0.98$  и числа степеней свободы (9.26)  $f=21$  по приложению А:  $t_p = 2.33$ .

Рассчитываем доверительный интервал (9.25).

$$28,02875 - 2,33 \cdot 0,015097058 \leq D \leq 28,02875 + 2,33 \cdot 0,015097058$$

$$27,99357385 \text{ мм} \leq D \leq 28,06392615 \text{ мм}$$

$$27,9936 \text{ мм} \leq D \leq 28,0639 \text{ мм}$$

**Задача 9.3.3.** Два оператора провели 14 независимых опытов по определению температуры воспламенения эмали однородного состава. Каждый оператор проверил 7 образцов (табл. 9.6). Определите с вероятностью 0.95, имеется ли различие между результатами, полученными каждым оператором, а также тем-

пературу воспламенения эмали, если результаты не подчиняются нормальному закону.

Таблица 9.6

Результаты измерений температуры операторами

Оператор А	716	749	771	766	743	738	688
Оператор В	777	771	774	788	716	699	693

Решение.

Проверяем однородность групп по критерию Уилкоксона. Располагаем все экспериментальные данные в вариационный ряд и присваиваем им номера:

Таблица 9.7

Результаты ранжирования экспериментальных данных

№ п.п.	1	2	3	4,5	4,5	6	7	8	9	10,5	10,5	12	13	14
Значение	688	693	699	716	716	738	743	749	766	771	771	774	777	788

Подсчитываем суммарный ранг для результатов оператора А (9.10.):

$$T = 1 + 4,5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10,5 = 46$$

Рассчитываем критические значения критерия (9.12), (9.13). Квантиль функции Лапласа для вероятности  $P=0,95$ :

$$\frac{P}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475, \quad t_{\frac{P}{2}} = 1,96, \quad \text{по приложению Б, таблица 1.}$$

$$T_{q-} = \frac{7(7+7+1)}{2} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot 7(7+7+1)}{12}} = 7,669713163 \approx 7,7$$

$$T_{q+} = \frac{7(7+7+1)}{2} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot 7(7+7+1)}{12}} = 67,83942633 \approx 67,8$$

Неравенство (9.11) выполняется:  $7,7 < 46 < 67,8$ .

Следовательно, результаты опытов являются однородными.

Проверим равнозначность результатов по критерию Сидже-ла-Тьюки. Присваиваем ранги, как показано в табл.9.8:

Таблица 9.8

Ранги результатов опыта по критерию Сидже-ла-Тьюки

Результат, °С	688	693	699	716	716	738	743	749	766	771	771	774	777	788
Ранг	1	4	5	8,5	8,5	12	13	14	11	10	7	6	3	2
Оператор	А	В	В	В	А	А	А	А	А	А	В	В	В	В

Суммарный ранг (9.10.) для оператора А:

$$T = 1 + 8,5 + 12 + 13 + 11 + 10 + 14 = 69,5$$

Гипотеза о равнозначности групп по критерию Сидже-ла-Тьюки не выполняется, так как не выполняется условие (9.11.):  $69,5 > 67,8$ .

Следовательно, группы результатов опытов являются неравнозначными.

Для каждой группы рассчитываем статистические характеристики:

- среднее арифметическое значение (9.16.):

$$\bar{A} = \frac{1}{7} (716 + 749 + 771 + 766 + 743 + 738 + 688) = 738,7142857 \text{ (}^\circ\text{C)};$$

$$\bar{B} = \frac{1}{7} (777 + 771 + 774 + 788 + 716 + 699 + 693) = 745,42857 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

- дисперсию  $S_j^2$  (9.17.):

$$S_A^2 = \frac{1}{7-1} (716 - 738,7142857)^2 + (749 - 738,7142857)^2 + \\ + (771 - 738,7142857)^2 + (766 - 738,7142857)^2 \times \\ \times ((743 - 738,7142857)^2 + (738 - 738,7142857)^2 \\ + (688 - 738,7142857)^2)^2 = 833,2380953 \quad (^\circ\text{C}^2);$$

$$S_B^2 = \frac{1}{7-1} ((777 - 745,4285714)^2 + (771 - 745,4285714)^2 + \\ + (774 - 745,4285714)^2 + (788 - 745,4285714)^2) \times \\ \times ((716 - 745,4285714)^2 + (699 - 745,4285714)^2 + \\ + (693 - 745,4285714)^2) = 1674,952381 \quad (^\circ\text{C}^2).$$

- статистический вес (9.18.):

$$P_A = \frac{7}{833,2380953} = 0,00840096 \quad (1 / ^\circ\text{C}^2)$$

$$P_B = \frac{7}{1674,952381} = 0,004179223 \quad (1 / ^\circ\text{C}^2)$$

Рассчитываем статистические характеристики общего среднего по двум группам результатов измерений:

- среднее весовое значение (9.21):

$$\overline{\overline{AB}} = \frac{738,7142857 \cdot 0,00840096 + 745,4285714 \cdot 0,004179223}{0,00840096 + 0,004179223} \\ = \frac{9,321221396}{0,012580183} = 740,9448174 (^\circ\text{C})$$

- СКО среднего весового (9.24):

$$S(\overline{\overline{AB}}) = \sqrt{\frac{(738,7142857 - 740,9448174)^2 \cdot 0,00840096 + (745,4285714 - 740,9448174)^2 \cdot 0,004179223}{2(2-1) \cdot 0,012580183}} \\ = \sqrt{\frac{0,125816366}{2 \cdot 0,012580183}} = 2,23619716 \quad (^\circ\text{C}).$$

Для определения доверительного интервала коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $P=0,95$  и числа степеней свободы  $f=7-1=6$  по приложению А:  $t_p = 2,45$ .

Рассчитываем доверительный интервал (9.25.).  
 $740,9448174 - 2,45 \cdot 2,236197116 \leq AB \leq$   
 $74,9448174 + 2,45 \cdot 2,23619716$   
 $735,4661344 \text{ } ^\circ\text{C} \leq AB \leq 746,4235004 \text{ } ^\circ\text{C}$   
 $735,5 \text{ } ^\circ\text{C} \leq AB \leq 746,4 \text{ } ^\circ\text{C}.$

#### 9.4. Задачи

**Задача 9.4.1.** Определите с вероятностью 0,98 возможна ли совместная обработка результатов измерений тангенса угла потерь конденсатора, приведённых в табл. 9.9.

Таблица 9.9

Результаты измерений тангенса угла потерь конденсатора

Группа 1	0,035	0,032	0,028	0,037	0,032	0,036	0,029	0,030	0,031	0,034	0,033
Группа 2	0,036	0,029	0,030	0,038	0,031	0,033	0,035	0,036	0,027	0,035	0,032

**Задача 9.4.2.** Определите, одинакова ли точность результатов измерений тангенса угла потерь, представленных в табл. 9.9.

**Задача 9.4.3.** Определите, являются ли однородными группы нормально распределённых результатов измерений угловой скорости вращения вала, приведённые в табл. 9.10.

Таблица 9.10

Результаты измерений угловой скорости, об/мин.

Группа 1	148	146	152	154	149	153	150	151
Группа 2	152	149	150	147	156	152	153	-
Группа 3	156	147	149	154	152	155	-	-

**Задача 9.4.4.** Оцените среднее весовое значение и его точность для результатов измерений диаметра роликов, приведённых в таблице 9.11.

Таблица 9.11.

## Результаты измерений диаметра роликов

№ группы	Диаметр роликов, мм							
	1	10,026	10,002	10,010	9,992	9,999	10,004	9,894
2	10,030	9,996	10,052	10,046	10,018	9,892	9,966	9,958
3	10,028	10,144	10,025	10,000	9,899	9,964	9,996	9,908
4	10,032	10,030	9,978	9,970	10,010	10,005	-	-
5	10,012	10,014	10,016	9,994	10,015	10,018	-	-

**Задача 9.4.5.** Для экспериментальных данных, приведённых в задаче 9.4.4, оцените, значимо ли различие дисперсий групп измерений.

**Задача 9.4.6.** Определите, существенно ли различаются дисперсии групп, приведённых в задаче 9.3.5, при условии, что результаты измерений в группах не подчиняются нормальному закону распределения вероятностей.

**Задача 9.4.7.** Определите, соответствует ли температура, поддерживаемая в муфельной печи установленному диапазону значений  $(310 \pm 10)$  °С, если периодический контроль температуры дал результаты; представленные в табл. 9.12, соответствующие нормальному закону.

Таблица 9.12

## Результаты измерений температуры

№ группы	Температура, °С				
	1	312	318	321	314
2	306	310	320	298	299
3	297	298	318	322	305
4	314	318	300	294	296

**Задача 9.4.8.** Выполнены 4 серии измерений изменений сопротивления в различных условиях. После их обработки получены следующие значения:  $\bar{R}_1 = 50.5$  Ом;  $S_1 = 0.082$  Ом;  $\bar{R}_2 = 49.8$  Ом;  $S_2 = 0.105$  Ом;  $\bar{R}_3 = 51.2$  Ом;  $S_3 = 0.110$  Ом;  $\bar{R}_4 = 50,8$  Ом;  $S_4 = 0,202$  Ом. Определите среднее весовое значение и оцените его точность.

**Задача 9.4.9.** При исследовании точности теодолитов был измерен угол различным числом измерений и различными способами (табл. 9.13). Определите среднее весовое значение угла, оцените его точность и доверительный интервал с вероятностью 0,95.

Таблица 9.13

Результаты измерений угла

№ серии измерений	Среднее арифметическое $\bar{X}_j$	Число измерений n	СКО $S_j$
1	46°40'10"	10	8"
2	46°40'18"	18	5"
3	46°40'22"	8	4"
4	46°40'15"	12	10"
5	46°40'12"	20	3"
6	46°40'08"	14	9"
7	46°40'05"	22	6"

**Задача 9.4.10** При исследованиях на износ резины, прошедшей вулканизацию при двух уровнях температуры, измерены потери веса образцов резиновых стержней (таблица 9.14). Можно ли утверждать с вероятностью 0,95, что наблюдается значимое различие между средними потерями веса образцов, прошедших различную вулканизацию, если результаты измерений подчиняются нормальному закону распределения?

Таблица 9.14

## Результаты испытаний

Уровень температуры вулканизации	Потери веса, г, для образцов											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	10,2	9,22	11,60	11,53	9,31	10,11	9,70	9,58	10,27	11,19	9,90	10,15
2	9,91	9,30	11,50	9,63	9,40	10,20	9,50	9,29	10,11	10,80	9,72	11,15

**Задача 9.4.11.** Определите с вероятностью 0,98 результаты измерений содержания соли в растворе (табл. 9.15), проведённых различными методами, а затем, если возможно, результат, общий для всех групп измерений. В каждой группе результаты измерений соответствуют нормальному закону распределения.

Таблица 9.15

## Результаты измерений концентрации

Метод измерений, использующий свойства	Концентрация соли в растворе, %											
	плотности	7,90	7,65	8,01	8,21	8,03	7,91	7,85	8,00	8,12	7,80	7,93
вязкости	7,84	8,01	8,00	8,02	7,80	7,79	7,49	8,04	8,03	-	-	
электропроводности	8,10	7,79	7,51	7,83	8,05	7,99	7,85	-	-	-	-	

**Задача 9.4.12.** Проверьте возможность совместной обработки и, в случае однородности групп результатов измерений толщины покрытия (табл. 9.16), получите общий результат в форме доверительного интервала с вероятностью 0,98. При проверке используйте ранговые критерии.

Таблица 9.16

Результаты измерений толщины покрытия

№ группы	Толщина покрытия, мкм										
	1	5,8	5,5	6,1	6,2	6,0	5,9	5,6	5,7	6,3	6,0
2	6,2	6,4	6,0	5,9	5,7	5,5	6,1	6,2	5,8	5,9	-

**Задача 9.4.13.** При двух уровнях температуры проверялась относительная усадка синтетического волокна (табл. 9.17). Определите, одинаковы ли характеристики этого показателя с вероятностью 0,95 по критериям, не учитывающим закон распределения данных.

Таблица 9.17

Результаты определения усадки

№ группы	Величина усадки, %												
	1	4,80	3,65	4,02	4,50	3,98	3,80	4,10	4,22	3,45	3,76	4,08	4,12
2	3,98	3,84	4,28	4,36	4,92	3,75	4,30	4,40	3,86	3,92	4,28	4,34	4,55

**Задача 9.4.14.** При контроле качества продукции двух декад на предприятии измерялся средний вес изделий в выборках (табл. 9.18). Используя непараметрический критерий, докажите, что средние веса носят случайный характер.

Таблица 9.18

Результаты контроля

День / Декада	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Средний вес изделий, г								
1	988	1010	922	996	1008	1005	990	994	1012	1004
2	1002	1008	989	995	993	1015	1002	1008	1010	990

**Задача 9.4.15.** Проволоки А и В обладают одинаковым средним удельным сопротивлением. Используя свободный от рас-

пределения критерий, проверьте, различаются ли дисперсии результатов измерений удельного сопротивления для 20 образцов проволоки каждого типа (табл. 9.19).

Таблица 9.19

Результаты измерений удельного сопротивления

Пр ов ол ока	Удельное сопротивление, $\times 10^{-4}$ Ом·мм																			
	A	1,24	1,20	1,25	1,21	1,22	1,25	1,20	1,19	1,25	1,23	1,22	1,26	1,24	1,21	1,26	1,23	1,24	1,26	1,21
B	1,20	1,23	1,19	1,24	1,26	1,29	1,18	1,29	1,17	1,26	1,20	1,18	1,23	1,27	1,20	1,24	1,26	1,25	1,19	1,27

**Задача 9.4.16.** При испытаниях технологического оборудования получены результаты определения его производительности (табл. 9.20). Предложено усовершенствование, которое должно увеличить производительность оборудования. По результатам испытаний оборудования до и после введения усовершенствования (табл. 9.20) определите, изменилась ли и на сколько производительность оборудования. Точность испытаний не должна существенно различаться. Распределение данных считать нормальным, доверительную вероятность равной 0,95.

Таблица 9.20

Результаты испытаний технологического оборудования

Испытания	Производительность, ед/ч								
До введения усовершенствования	180	195	210	202	198	200	208	214	
После введения усовершенствования	216	200	228	206	210	218	220	224	

**Задача 9.4.17.** Выпускаемые однотипные изделия испытываются на двух стендах А и В (табл. 9.21). Предполагая, что результаты определения прочности на разрыв соответствуют нормальному распределению, определите доверительный интервал прочности изделий с вероятностью 0.98.

Таблица 9.21

Результаты испытаний на прочность, кН

Стенд А	2,524	2,522	2,527	2,542	2,501	2,509	2,574	2,519	2,592	2,596
Стенд В	2,558	2,518	2,518	2,521	2,614	2,598	2,575	2,541	2,566	2,608

**Задача 9.4.18.** Пяти бригадам контролёров было поручено исследовать бруски из твёрдой древесины на прочность под гидравлическим прессом. Давление увеличивали до тех пор, пока брусок не ломался. Результаты предельных давлений для брусков, приведенные в таблице 9.22, подчиняются нормальному закону. Определите прочность брусков в интервальной форме с доверительной вероятностью  $P=0,96$ .

Таблица 9.22

Результаты определения прочности брусков

Интервалы давления пресса, кПа	Бригада				
	1	2	3	4	5
	Количество брусков				
0-2		2			1
2-4	2	1		1	0
4-6	3	0		3	9
6-8	10	3	3	5	9
8-10	16	6	9	11	10
10-12	32	7	12	11	28
12-14	24	17	19	20	31
14-16	9	18	19	29	20
16-18	2	11	28	9	1
18-20	1	14	9	10	
20-22	1	9	1	1	
22-24		6			
24-26		1			
26-28		2			
28-30		0			
30-32		1			
32-34		2			

**Задача 9.4.19.** Определите с вероятностью 0,95, варьирует ли от одной рабочей смены к другой величина изменчивости температуры в печи (табл. 9.23).

Таблица 9.23

Результаты измерений температуры в печи

Рабочая смена	Температура, °C							
	1	858	862	840	856	872	864	855
2	850	868	876	870	864	869	868	850
3	880	860	862	856	850	858	864	870
4	870	868	865	858	852	850	848	846

**Задача 9.4.20.** При определении силы сцепления клеевых соединений двух стёкол проведены испытания на растяжение образцов, у которых склеиваемые поверхности были обработаны перекрёстной шлифовкой и торцевой обточкой. По результатам испытаний (табл. 9.24) определите, различна ли прочность соединений.

Таблица 9.24

Результаты испытаний

Способ обработки	Сила сцепления образцов, усл. ед.										
Перекрёстная шлифовка	16	14	20	15	19	18	18	19	17	18	
Торцевая обточка	13	14	14	15	10	19	17	13	21	15	

**Задача 9.4.21.** Измерения фотометром световых потоков, отражённых от полированных поверхностей двух групп, содержащих соответственно 8 и 11 образцов, проведены с погрешностями (СКО)  $S_1=0,85$  мм и  $S_2=1,37$  мм. Определите наименьшее значение вероятности, для которого две группы результатов измерений можно обрабатывать совместно при различии их средних значений на 1,57 мм.

**Задача 9.4.22.** Какой должна быть минимальная точность группы результатов 9 измерений частоты, чтобы группы считались равноточными, если СКО 16 результатов измерений второй группы составило  $S_2=0,15$  Гц при уровне значимости 0,05.

**Задача 9.4.23.** Определите с вероятностью 0.95 возможность и вид совместной обработки нормально распределённых результатов 4 групп измерений времени выхода цепи на температурный режим, если предварительная обработка результатов измерений в группах дала статистические характеристики, представленные в табл. 9.25.

Таблица 9.25

Статистические характеристики групп результатов измерений

Статистические характеристики	№ группы			
	1	2	3	4
1.Среднее арифметическое, мин	20,5	20	20,3	20,04
2.СКО, мин	1,02	2,1	1,4	1,56
3.Число измерений	8	5	10	12

**Задача 9.4.24.** Какие наибольшие результаты измерений может включать группа меньшего объёма  $n=5$ , чтобы они считались однородными с группой результатов объёмом  $m=7$  при распределении данных, отличном от нормального закона. Вариационный ряд результатов измерений магнитного потока магнитоэлектрическим веберметром, мкВб: 610; 615; 617; 621; 622; 625; 626; 629; 630; 635; 637; 640.

**Задача 9.4.25.** Измерения вязкости полимера вискозиметром проведены для различных образцов. Результаты статистической обработки представлены в таблице 9.26. Найдите с вероятностью 0,98 доверительный интервал, общий для всех образцов, предварительно проверив однородность и равноточность результатов.

Таблица 9.26

Результаты измерения вязкости

Статистическая характеристика	№ образца				
	1	2	3	4	5
1.Среднее арифметическое значение, усл.ед.	1,9	2,0	1,94	2,06	1,93
2. Вес	700	347,2	1234,6	625	561,23
3.Число измерений	7	5	10	4	11

**Задача 9.4.26.** По результатам работы 5 контролёров определялось время, затрачиваемое на контроль качества шарикоподшипников. Каждый контролёр проверил по 10 подшипников. Затраченное на контроль время представлено в табл. 9.27. Если можно определить общее среднее время контроля при условии, что его распределение не соответствует нормальному закону, рассчитайте доверительный интервал с вероятностью 0,95.

Таблица 9.27

Результаты работы контролёров

Контролёр	Время, затраченное на контроль, мин									
	1	5	8	6,5	9	11,8	12	10,5	12,5	9,6
2	10	6,8	10,2	9	6	8	7,5	10	10,5	9,4
3	6	8	10	4	9,5	11	12	10,4	11,5	10,2
4	8,5	12	14	10	11,2	8	14	11,8	10,6	12,4
5	9	11	14	16	12	10	12,5	11	9,6	10,8

**Задача 9.4.27.** Определите внутригрупповую и межгрупповую дисперсии и доверительный интервал с вероятностью 0,99 для группы результатов измерений мощности, характеристики которых представлены в табл. 9.28.

Таблица 9.28

Статистические характеристики групп результатов измерений

Статистическая характеристика	№ группы					
	1	2	3	4	5	6
1. Среднее арифметическое, Вт	712	711,8	714	713	711	712,5
2. СКО, Вт	2,5	1,86	2,1	1,9	2,05	2,02
3. Число измерений	10	6	12	15	8	11

**Задача 9.4.28.** При определении веса упаковки с пищевым продуктом в выборке 1 получена дисперсия  $58,8 \text{ г}^2$ , в выборке

ке 2 – дисперсия  $28 \text{ г}^2$ . Можно ли сказать, что выборки взяты из партии изделий с одним и тем же значением дисперсии, если их объёмы соответственно равны 17 и 21?

**Задача 9.4.29.** Характеристика разброса значений предела прочности 50 образцов синтетического волокна составляет  $600 \text{ Н}^2$ . С целью её уменьшения внесли изменения в технологический процесс изготовления волокна. После чего по результатам испытаний были получены значения прочности, приведенные в таблице 9.29. Привело ли изменение процесса к существенному снижению дисперсии?

Таблица 9.29

Результаты определения предела прочности на разрыв, Н

№ образца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Предел прочности, Н	619	607	660	640	656	632	603	611	664	627	656	668	636	640	610

**Задача 9.4.30.** Проведены исследования предела прочности на разрыв на слитках шести плавок титанового сплава. Было изготовлено по 5 образцов из каждого слитка, и на них проверена однородность дисперсий предела прочности. Получены следующие значения дисперсий,  $(\text{Н/мм})^2$ : 25985,4; 48904,2; 58749,6; 11782,2; 65528,4; 63753,0.

Можно ли утверждать, что все дисперсии одинаковы? В предположении, что дисперсии однородны, определите 99%-ный доверительный интервал для общего значения дисперсии.

**Задача 9.4.31.** До наладки станка была проверена точность изготовления 10 изделий и найдена оценка дисперсии контролируемого признака  $S_1^2 = 9,6$ . После наладки измерено еще 15 изделий и получена оценка дисперсии  $S_2^2 = 5,7$ . Можно ли считать, что точность изготовления изделий после наладки повысилась? Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

**Задача 9.4.32.** В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч. со средним квадратичным отклонением 100 ч. Значение выборочного среднего времени безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 ч. Предположим, что среднее квадратичное времени безотказной работы для приборов в выборке совпадает со средним квадратичным во всей партии, а контролируемая характеристика имеет нормальное распределение. Выясните, можно ли считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям, если: а)  $\alpha = 0,1$ ; б)  $\alpha = 0,01$ .

**Задача 9.4.33.** Утверждается, что шарики, изготовленные станком-автоматом, имеют средний диаметр  $d_o = 10$  мм. Используя односторонний критерий при  $\alpha = 0,05$ , проверьте эту гипотезу, если в выборке из  $n = 16$  шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, считая, что: а) дисперсия  $\sigma^2$  известна и равна  $\sigma^2 = 1$  мм<sup>2</sup>; б) значение оценки дисперсии, определенное по выборке, составляет  $S^2 = 1,21$  мм<sup>2</sup>. Контролируемый размер имеет нормальное распределение.

**Задача 9.4.34.** Для проверки внутреннего диаметра кольца была взята выборка объема  $n = 25$  и найдены отклонения от размера (погрешность изготовления) 100 мм. По результатам измерений подсчитано значение выборочного среднего  $\bar{x} = 31,52$  мм и оценка среднего квадратичного отклонения  $S = 6$  мм. Требуется проверить, существенно ли превышает рассчитанное по выборке среднее значение (31,52 мм) номинальный размер (30 мм). В производстве недопустимы большие положительные отклонения. Погрешность изготовления имеет нормальное распределение. Уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

**Задача 9.4.35.** Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобраны 37 шт. Значение выборочного среднего величины сопротивления при этом оказалось равным: 9,3 кОм. Используя двусторонний критерий при  $\alpha = 0,05$ , проверьте гипотезу о том, что выборка взята из партии с номинальным значением 10 кОм при альтернативной гипотезе, согласно которой номинальное значение не равно 10 кОм, если:

а) дисперсия рассматриваемой случайной величины известна и равна  $4 \text{ кОм}^2$ ; б) дисперсия значения сопротивления неизвестна, а значение выборочной дисперсии равно  $6,25 \text{ кОм}$ . Распределение контролируемого признака нормальное.

**Задача 9.4.36.** Установка имеет среднюю производительность  $1000 \text{ кг}$  вещества в сутки со средним квадратичным отклонением, равным  $80 \text{ кг}^2$ . При изменении технологии производительность возрастает до  $1100 \text{ кг}$  вещества в сутки с тем же средним квадратичным отклонением. Можно ли считать, что новая технология обеспечивает повышение производительности, если: а)  $\alpha = 0,05$ ; б)  $\alpha = 0,1$ ? Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

**Задача 9.4.37.** Ожидается, что при добавлении специальных веществ жесткость воды уменьшается. По оценкам жесткости воды до и после добавления специальных веществ по  $40$  и  $50$  пробам соответственно получили средние значения жесткости (в стандартных единицах), равные  $4,0$  и  $3,8$ . Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равной  $0,25$ . Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект? Принять  $\alpha = 0,05$ . Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

**Задача 9.4.38.** Два штурмана определяли пеленг маяка по нескольким замерам, используя различные пеленгаторы. Результаты замеров:  $\bar{x} = 70,2^\circ$  при  $n_1 = 4$  и  $\bar{y} = 70,5^\circ$  при  $n_2 = 9$ . С помощью двустороннего критерия проверьте при  $\alpha = 0,05$  гипотезу о том, что различие результатов вызвано только случайными ошибками, если средние квадратичные отклонения для обоих пеленгаторов известны и равны  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5^\circ$ .

**Задача 9.4.39.** Заводы А и В выпускают приборы одного типа. По выборке из  $50$  приборов завода А установили среднюю продолжительность работы прибора  $1288 \text{ ч}$  со средним квадратичным отклонением  $80 \text{ ч}$ , а также по выборке того же объема с завода В —  $1208 \text{ ч}$  со средним квадратичным отклонением  $94 \text{ ч}$ . На уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверьте гипотезу о том, что средний срок службы приборов с обоих заводов одинаков. Считать, что продолжительность работы одного прибора распределена приближенно по нормальному закону.

**Задача 9.4.40.** При обработке втулок на станке-автомате ведутся наблюдения за режимом его работы. Для проверки стабильности работы станка через определенные промежутки времени изучают выборки объема  $n = 10$ . По результатам двух выборок (табл. 4.1) проверьте стабильность работы станка. Распределение контролируемого признака предполагается нормальным. Также предполагается, что дисперсии генеральных совокупностей, из которых получены выборки, равны. Уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

Таблица 9.30

Результаты выборочного контроля втулок

Номер изделия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	2,060	2,063	2,068	2,060	2,067	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060
$y_i$	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,059	2,057

**Задача 9.4.41.** Точность наладки станка-автомата, производящего некоторые детали, характеризуется дисперсией длины детали. Если эта величина будет больше  $400 \text{ мкм}^2$ , станок останавливается для наладки. Значение выборочной дисперсии, найденное по 15 случайно отобраным деталям из продукции станка оказалось равным  $\sigma^2 = 680 \text{ мкм}^2$ . Определите, нужна ли наладка станка, если а)  $\alpha = 0,01$ ; б)  $\alpha = 0,1$ . Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

**Задача 9.4.42.** При изменении определенной процедуры проверки коэффициента трения установлено, что дисперсия результатов измерений этого коэффициента составляет  $0,1$ . Значение выборочной дисперсии, вычисленное по результатам 26 измерений коэффициента трения, оказалось равным  $0,2$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,1$  проверьте гипотезу о том, что дисперсия результатов измерений коэффициента трения равна  $0,1$ . Предполагается, что контролируемый признак имеет нормальное распределение.

**Задача 9.4.43.** На двух токарных автоматах изготавливают детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано  $n_1 = 9$  деталей, а из продукции второго  $n_2 = 11$  деталей. Оценки выборочных дисперсий контрольного размера,

определенные по этим выборкам, равны  $\sigma_1^2 = 5,9 \text{ мкм}^2$  и  $\sigma_2^2 = 23,3 \text{ мкм}^2$  соответственно. Проверьте гипотезу о равенстве дисперсии при  $\alpha = 0,05$ , если альтернативная гипотеза утверждает следующее: а) дисперсии не равны; б) дисперсия размера для второго станка больше, чем для первого.

**Задача 9.4.44.** Для проверки влияния нейтронного облучения на деформируемость меди были проведены эксперименты на растяжение двух партий образцов. В первой необлученной (контрольной) партии из 13 образцов результаты экспериментов при деформации 0,5 оказались следующими:

6,01; 6,23; 5,75; 6,17; 5,97; 6,22; 6,19;  
5,94; 6,01; 5,87; 6,23; 5,78; 5,99.

Вторая партия из 13 образцов после облучения потоком нейтронов интенсивностью  $2 \cdot 10^{18}$  нейтрон/см<sup>2</sup> при той же деформации 0,5 привела к следующим результатам:

5,75; 5,86; 6,13; 6,18; 5,63; 5,74; 5,97;  
5,49; 6,22; 5,79; 6,32; 5,45; 6,03.

Изменяется ли прочность меди после облучения?

**Задача 9.4.45.** Для упрочнения алюминиевых изделий используется операция нагартовки (наклепа), заключающаяся в пластической деформации. Семь образцов алюминия были подвержены 2 %-ной нагартовке, а десять образцов - 5%-ной. Прочность (в кг/мм<sup>2</sup>) образцов первой партии составила:

17; 18; 16; 19; 15; 20; 14,

а второй: 21; 22; 20; 23; 19; 24; 18; 21,5; 20,6.

Можно ли на основании этих данных сделать вывод об увеличении прочности алюминия при увеличении пластической деформации?

**Задача 9.4.46.** Для определения предела текучести некоторой марки стали по просьбе заказчика, которому была необходима сталь с пределом текучести в 30 кгс/мм<sup>2</sup>, были проведены стандартные испытания  $n = 25$  образцов. Результаты испытаний (кгс/мм<sup>2</sup>) следующие:

32,00	30,69	35,68	34,41	41,95	40,05	32,63
32,77	30,41	28,84	29,70	28,61	34,39	35,48
29,97	34,80	30,45	30,36	34,66	30,71	33,19
29,49	29,60	28,43	29,29			

Определите, соответствует ли изготовленная сталь требованиям заказчика.

## 10. РЯДЫ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

### 10.1 Основные положения

#### *10.1.1. Сущность и содержание стандартизации*

В соответствии с ФЗ РФ «О техническом регулировании» под стандартизацией понимается деятельность по установлению правил и характеристик в целях их добровольного многократного использования, направленная на достижение упорядоченности в сферах производства и обращения продукции и повышения конкурентоспособности продукции, работ и услуг. В этой формулировке четко определены сущность, содержание и объекты стандартизации.

Под стандартом понимается документ, в котором в целях добровольного многократного использования устанавливаются характеристики продукции, правила осуществления и характеристики процессов жизненного цикла продукции, выполнения работ или оказания услуг.

Главными особенностями стандартизации являются:

- 1) стандартизация – это наведение оптимального порядка в любой области человеческой деятельности;
- 2) стандартизация – технико-экономическая наука;
- 3) стандартизация не самоцель, а средство достижения цели, а именно, обеспечения качества, конкурентоспособности объектов технического регулирования. На практике это означает обеспечение минимума затрат ресурсов (материальных, финансовых, людских, временных) при максимуме качественных (потребительских) характеристик объектов технического регулирования;
- 4) стандартизация (унификация) имеет смысл только в ситуациях имеющих повторяющийся характер;
- 5) эффект от стандартизации значим на начальных этапах создания изделий. Бессмысленно говорить об уровне унификации и стандартизации уже серийного изделия, как о качестве фундамента уже построенного здания.

Основные методы стандартизации:

✓ комплексная стандартизация (конструкторско-технологический и эксплуатационный подходы). Теоретическая основа – ряды предпочтительных чисел;

✓ опережающая стандартизация. Теоретическая основа-теория прогрессивного развития показателей качества продукции;;

✓ ограничительная стандартизация. Теоретическая основа- статистические методы: методы оптимизации;

Основные формы стандартизации:

а) унификация;

б) типизация;

в) симплификация;

г) агрегатирование;

д) взаимозаменяемость;

е) классификация (ранее, нормализация).

#### 10.1.2. Правила построения параметрических рядов

Одним из важных направлений стандартизации является разработка параметрических стандартов, в которых устанавливаются ряды значений, характеризующих основные параметры различных промышленных изделий.

Такие ряды основаны на рядах предпочтительных чисел.

Применение типоразмерных рядов, основанных на рядах предпочтительных чисел, при конструировании создает предпосылки для унификации машин, агрегатов, узлов и деталей.

Предпочтительным числам свойственны определенные математические закономерности. Так, наипростейшие ряды предпочтительных чисел строятся на основе *арифметической прогрессии*, т.е. такой последовательности чисел, в которой разность между последующим и предыдущим членами (разность прогрессии) остается постоянной.

Любой член арифметической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad (10.1)$$

где  $a_1$  – первый член прогрессии;

$d$  - разность прогрессии;

$n$  - номер взятого члена.

Ряды предпочтительных чисел, основанные на арифметической прогрессии, используются в параметрических стандартах сравнительно редко, они имеют существенный недостаток – относительная неравномерность числовых значений (разряженность значений в зоне малых величин и сгущенность в зоне больших величин).

Для преодоления этого недостатка используют *ступенчатую - арифметические ряды*, в которых разность (интервал) значений является постоянной не для всего ряда, а только для определенной его части. В стандартизации наиболее чаще используются ряды предпочтительных чисел, построенных на основе геометрической прогрессии.

Любой член геометрической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad (10.2)$$

где  $a_1$  - первый член прогрессии;

$q$  - знаменатель прогрессии;

$n$  - номер взятого члена.

Ряды предпочтительных чисел регламентированы ГОСТ 8032-84 и представляют собой ряды геометрической прогрессии со следующими знаменателями:

для ряда R5:  $Q = \sqrt[5]{10} \approx 1,6$ ;

для ряда R10:  $Q = \sqrt[10]{10} \approx 1,25$

для ряда R20:  $Q = \sqrt[20]{10} \approx 1,12$

для ряда R40:  $Q = \sqrt[40]{10} \approx 1,06$ .

Каждый ряд содержит соответственно постоянное количество значений: R5 – 5; R10 – 10; R20 – 20; R40 – 40 (Приложение М).

На основании свойства рядов предпочтительных чисел предоставляется возможность определения предпочтительного числа ряда по номеру ряда и, наоборот, – определение номера ряда по предпочтительному числу.

Используя свойства логарифмов, можно получить порядковый номер предпочтительного числа  $N$ , соответствующий любому интервалу, используя следующую зависимость:

$$N = N_T + k \times 40, \quad (10.3)$$

где  $N_T$  – номер числа по таблице в ГОСТ 8032-84;

$k$  – целое положительное или отрицательное число, определяющее положение десятичного интервала (номер интервала) по отношению к интервалу:

$$\text{для } k=0 \Rightarrow 1 \div 10$$

$$k=1 \Rightarrow 10 \div 100$$

$$k=2 \Rightarrow 100 \div 1000$$

$$k=3 \Rightarrow 1000 \div 10000 \text{ и т.д.}$$

В электротехнике используются ряды, обозначенные «Е». Они также, как и типоразмерные ряды построены на основании геометрической прогрессии, знаменатели которой соответственно равны:

$$\text{для ряда E3: } Q = \sqrt[3]{10} \approx 2,2;$$

$$\text{для ряда E6: } Q = \sqrt[6]{10} \approx 1,5$$

$$\text{для ряда E12: } Q = \sqrt[12]{10} \approx 1,2$$

$$\text{для ряда E24: } Q = \sqrt[24]{10} \approx 1,1$$

$$\text{для ряда E48: } Q = \sqrt[48]{10} \approx 1,04;$$

$$\text{для ряда E96: } Q = \sqrt[96]{10} \approx 1,02$$

$$\text{для ряда E192: } Q = \sqrt[192]{10} \approx 1,01.$$

В отличие от рядов  $R$ , рассчитанные значения геометрической прогрессии в рядах  $E$  округляются с точностью до 0,1. Следовательно, округление является более грубым, так как в рядах  $R$  округление производится до 0,01.

С целью унификации изделий более редкий параметрический ряд (с меньшим количеством значений) является предпочтительным. Выбор ряда зависит от допустимой погрешности ок-

ругления значений. Каждый из основных рядов устанавливает числа в интервале значений от 1 до 10. Числа в других десятичных интервалах получают умножением или делением значений соответствующего основного ряда на 10, 100, 1000 и т.д.

Кроме основных типоразмерных рядов установлены дополнительные ряды - ряд R80 со знаменателем геометрической прогрессии равным  $Q = \sqrt[80]{10} \approx 1,03$  и количеством значений, равным 80; а также дополнительный ряд R160 со знаменателем геометрической прогрессии, равным  $Q = \sqrt[160]{10} \approx 1,02$ , и количеством значений, равным 160.

При необходимости в стандартах используются *ступенчатые* ряды, построенные по разным геометрическим прогрессиям (из числа входящих в ГОСТ 8032-84).

Допускается применять *производные ряды*. Их получают из основных рядов или дополнительного путем отбора каждого 2 – 3 – 4 – 5-го или n-го члена. В обозначении производных рядов приводят обозначение ряда, из которого он образован с указанием шага, с которым отбирались значения.

Если имеются ограничения пределов ряда или ряд содержит определенное значение, то сведения об этом указываются в круглых скобках после обозначения ряда. Производные ряды можно применять только тогда, когда ни один из основных рядов не удовлетворяет предъявляемым требованиям, или когда устанавливаются градации числовых характеристик, зависящих от параметров и размеров, образованных на базе основных рядов.

### *10.1.3. Экономическое обоснование выбора параметрического ряда*

Для построения исходного (принятого) параметрического ряда изделий основными данными являются затраты на материалы, прочие затраты, годовой объем производства.

Основным критерием установления диапазона типоразмеров изделия является его потребность. В тех случаях, когда исходные данные имеются только по некоторым типоразмерам ряда, для остальных типоразмеров данные определяются методом интерполяции.

Выбор оптимального размерного ряда сводится к определению количества типоразмеров членов ряда, при котором затраты на изготовление изделия и его эксплуатацию были бы минимальными. При этом возможны три случая: затраты на эксплуатацию неизменны; затраты уменьшаются и затраты увеличиваются. Рассмотрим первый случай.

Распределив расходы по элементам затрат, определяют количество типоразмеров (членов ряда), при которых затраты на изготовление изделия и его эксплуатацию были бы минимальными. При этом анализируют изменения годовых затрат по исходному ряду при разрежении и увеличении дискретности этого ряда. Например, если исходный ряд соответствует нормальному ряду R10, то следует выяснить, как изменяются годовые затраты в случае увеличения его дискретности до R20 или разрежения до R5.

При *разрежении ряда*, например, вдвое, вместо двух смежных членов ряда остается один. Общая годовая программа не изменяется. Следовательно, новая программа выпуска для этого члена ряда  $V_n$  равна сумме программ двух исходных членов ряда. Коэффициент изменения программы в этом случае равен:

$$K_{н.п} = \frac{V_n}{V_i}, \quad (10.4)$$

где  $V_n$  - программа для нового члена ряда;

$V_i$  – исходная программа для ближайшего большего (из рассматриваемых ) членов ряда.

Прочие затраты на разработку измененного параметрического ряда можно определить с помощью коэффициента изменения прочих затрат  $K_{из}$ , который рассчитывается по формуле:

$$K_{из} = \frac{1}{K_{н.п}^z} \quad (10.5)$$

где  $z$  – показатель степени (характеризует степень интенсивности снижения себестоимости при увеличении программы)  
 $z = 0,2 \dots 0,3$  - определяют, исходя из программы выпуска, количества затраченного материала и т.д.

Абсолютное значение прочих равно

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{пр}}^{\cdot} K_{\text{из}}, \quad (10.6)$$

где  $S_{\text{пр}}$  - прочие затраты при исходной программе  $V_i$  для ближайшего большего члена ряда;

$S_{\text{пр}}^{\cdot}$  - прочие затраты при измененной программе  $V_n$ .

Затраты на материалы  $M_p$  принимаются по затратам на материалы для изделий ближайшего члена исходного ряда. Себестоимость изделия определяется по формуле:

$$C^{\cdot} = M_p + S_{\text{пр}}, \quad (10.7)$$

Годовые затраты на изготовление изделия по измененному ряду равны произведению себестоимости единицы на годовую программу:

$$C_r^{\cdot} = C^{\cdot} V_n \quad (10.8)$$

Измененный ряд целесообразнее исходного, если  $\sum C_r^{\cdot} < \sum C_r$ .

Если общие годовые по полученному ряду окажутся ниже, чем по исходному, то следует провести аналогичный расчет для следующего ряда в сторону разрежения. Если же затраты по новому ряду выше, чем по исходному, то дальнейшие расчеты нецелесообразны.

При увеличении дискретности ряда, например, в 2 раза, что соответствует переходу от R10 к R20 (приложение М), расчеты производятся следующим образом.

Так как общая годовая программа не изменяется, то можно принять, что исходная программа выпуска изделий распределяется поровну. В этом случае измененная программа для нового члена ряда равна:

$$V_n = V_i / 2, \quad (10.9)$$

где  $V_n$  – исходная программа для (R10) члена ряда большего размера. Коэффициент изменения программы в данном случае  $K_n = 1/2 = 0,5$

Затраты на материалы для вновь полученного члена ряда определяется по формуле:

$$M_p = \frac{M_1 + M_2}{2}, \quad (10.10)$$

где  $M_1$  – затраты на материалы меньшего члена исходного ряда;  
 $M_2$  – затраты на материалы большего члена исходного ряда.

Коэффициент изменения прочих затрат, себестоимость изделия и годовые затраты определяются так же, как и при разрезании ряда.

Абсолютное значение прочих затрат для членов исходного ряда вычисляют по формуле (10.6). Для новых членов  $S_{пр}$  определяют методом интерполяции пропорционально величинам интервалов размеров нового ряда.

Измененный ряд целесообразнее исходного, если  $\Sigma C_r' < \Sigma C_r$ .

На основании анализа суммарных годовых затрат по каждому варианту выбирают наиболее экономически целесообразный ряд.

## 10.2. Вопросы для самопроверки

1. Какие ряды называются параметрическими?
2. Что является основой для построения параметрических рядов?
3. Что представляют собой типоразмерные ряды?
4. Как используется «знаменатель геометрической прогрессии»?
5. Как используется «разность прогрессии»?
6. С какой целью используются ступенчато - арифметические ряды?
7. Как определяется член арифметической прогрессии?

8. Как определяется член геометрической прогрессии?
9. Как строятся ступенчатые ряды?
10. Как получить порядковый номер предпочтительного числа для любого десятичного интервала?
11. Какие параметрические ряды применяются в электронике и электротехнике?
12. Как строятся параметрические ряды, применяемые в электротехнике?
13. В чем состоит недостаток рядов «E» по сравнению с рядами «R»?
14. По какому принципу определяется предпочтительный параметрический ряд?
15. Как получить значения параметров в различных десятичных интервалах?
16. Что представляет собой дополнительный типоразмерный ряд?
17. Как образуются и обозначаются производные ряды?
18. Как в обозначении ряда указать его пределы или нестандартные значения, которые должны быть обязательно включены?
19. Когда можно применять производные ряды?
20. Какие основные данные используют при экономическом обосновании выбора параметрического ряда?
21. По какому параметру проводят оценку экономической целесообразности выбора параметрического ряда?
22. Какие коэффициенты определяют в случае разрежения параметрического ряда?
23. В каком случае целесообразно проводить расчет для следующего ряда в сторону разрежения относительно исходного?

### 10.3. Примеры решения типовых задач

**Задача 10.3.1.** Найти номера предпочтительных чисел 1000 и 0,0955.

**Решение.** Согласно приведенной выше зависимости определяем:

$$N_{1000} = N_{1.00} + 3 \times 40 = 120,$$

Т.к.  $N_{1,00}=0$  по таблице в ГОСТ 8032–84, а число 100 относится к 3-му интервалу ( $k=3$ ):

$$N_{0,0955} = N_{9,50} - 2 \times 40 = -41,$$

Т.к.  $N_{9,50}=39$ , а число 0,0955 относится к интервалу ( $k=-2$ )

**Задача 10.3.2.** Обозначьте ряд, если размеры изделия начинаются с размера 4 и имеют знаменатель геометрической прогрессии  $Q=1,25$ .

**Решение.** Этому знаменателю соответствует ряд  $R_{10}$ , ограниченный нижним пределом 4. Его обозначение:  $R_{10}(4\dots)$ .

**Задача 10.3.3.** Размеры изделия должны содержать размер 125 и имеют знаменатель  $Q=2,5$ . Обозначьте ряд.

**Решение.** Условием удовлетворяет производный ряд, составленный из основного ряда  $R_5$  с отбором каждого второго члена ряда. Обозначение ряда  $R_5/2(\dots 125\dots)$ .

**Задача 10.3.4.** Пользуясь таблицей приложения М и свойствами предпочтительных чисел, перемножьте числа 1,4 и 2,5.

**Решение.** Числу 1,4 соответствует номер 6, числу 2,5 – номер 16. Номер результата произведения чисел соответствует сумме их номеров:  $6+16=22$ . Номеру 22 по таблице приложения М соответствует число 3,55.

**Задача 10.3.5.** Определить ряд и его знаменатель (или разность) ряда для следующей последовательности значений:

- 1) 1-3-5-7-9-11-13....;
- 2) 1-0,9-0,8-0,7-0,6-0,5-....
- 3) 10,16, 25, 40, 63, 100 и 160
- 4) 1,0 -1,6 - 2,5 - 4,0 - 6,3 - 8,0 - 10,0.

**Решение.**

1) Последовательность значений 1-3-5-7-9-11-13.... представляет собой ряд, построенный на основе арифметической прогрессии с возрастающей последовательностью значений с разностью 2.

2) Последовательность значений 1-0,9-0,8-0,7-0,6-0,5-.... - арифметическая прогрессия, убывающая с разностью 0,1.

3) Последовательность значений 10,16, 25, 40, 63, 100 и 160 - геометрическая прогрессия ряд R5, знаменатель  $Q = 1,6$

4) Последовательность значений 1,0 -1,6 - 2,5 - 4,0 - 6,3 - 8,0 - 10,0 – ступенчатых ряд, состоящий из двух рядов: R5 (1,0...6,3) со знаменателем прогрессии  $Q=1,6$  и R10 (6,3...10,0), имеющим  $Q=1,25$ .

**Задача 10.3.6** Установлено изготовление валов с длинами по ряду R10;  $z = 0,2$ . Обосновать экономическую целесообразность изготовления этих валов с длинами по ряду R10 и R40. Исходные данные указаны в табл. 10.1. (столбцы 1-4).

Таблица 10.1

Исходные данные для валов с длинами по ряду R20 (столбцы 1-4)

Длина вала $l$ , мм	Годовая программа $V_{г}$ , тыс.шт	Затраты на материалы, $M_{р}$ , руб.	Прочие затраты, $S_{пр}$ руб.	Себестоимость одного изделия, $C' = M + S_{пр}$	Годовые затраты в производстве, $C'_г = C'V$ , руб
1	2	3	4	5	6
400	10	84	42	126	1260
450	16	90	45	135	2160
500	3	96	53	149	447
560	10	102	121	223	2230
630	3,6	113	124	237	853

Итого:  $\Sigma C'_{г R20} = 6950$  руб.

**Решение.** Определяем себестоимость одного изделия  $C'_о$  по формуле 10.7 и годовые затраты в производстве  $C'_г$  по формуле 10.8 для исходного ряда R20 и заполняем столбцы 5 и 6 таблицы 10.1. Рассчитываем суммарную годовую себестоимость в объеме годовой программы для исходного ряда R20 -  $\Sigma C'_{г R20} = 6950$  руб.

1. Определяем себестоимость валов с длинами, соответствующими размерному ряду R10. Результаты расчетов сводим в табл. 10. 2.

Длина валов по ряду R10 представлена в столбце 1 таблицы 10. 2.

Годовую программу  $V_n$  для длин  $l = 500; 630$  рассчитываем исходя из того, что общая годовая программа выпуска изделий исходного ряда и нового не должны изменяться. Так, годовая программа длины вала  $l = 500$  по ряду R10 складывается из программы для длины  $l = 500$  ( $V_n=3$  тыс. шт.)

Таблица 10.2

### Результаты расчета ряда R10

Длина вала $l$ , мм	Годовая программа $V_n$ , тыс. шт.	Затраты на материалы, $M_p$ , руб.	Коэффициент изменения		Прочие затраты, $S_{пр} = S'_{пр} \cdot K_{из}$ , руб.	Себестоимость одного изделия, $C' = M + S_{пр}$	Годовые затраты в производстве, $C'_r = C' \cdot V_n$ , руб
			программы $K_{п.}$	прочих затрат $K_{из.}$			
1	2	3	4	5	6	7	8
400	10	84	1	1	42	126	1260
500	19	96	6,33	0,69	37	133	2527
630	13,6	113	3,78	0,766	95	208	2828,8

Итого:  $\Sigma C'_{r R10} = 6615,8$  руб. по ряду R20 и длины  $l = 450$  ( $V_n=16$  тыс. шт.) по ряду R20 – не вошедшей в ряд R10, т.е.  $V_{n500} = V_{i500} + V_{i450} = 3 + 16 + 19$  тыс.шт. Аналогично рассчитываем  $V_n$  для  $l = 630$ . Затраты на материалы ( $M_p$ ) – по исходному ряду. Коэффициент изменения программ и прочих затрат определяем по формулам 10.4 и 10.5. Прочие затраты рассчитываем по формуле 10.6, себестоимость единицы изделия и себестоимость в объеме годовой программы - соответственно по формулам 10.7 и 10.8. Результаты расчетов заносим в табл. 10.2 и рассчитываем суммарную годовую себестоимость в объеме годовой программы для ряда R10 -  $\Sigma C'_{r R10} = 6615,8$  руб.

Так как общие годовые затраты по ряду R10 меньше чем по исходному R20 ( $\Sigma C'_{r R10} < \Sigma C'_{r R20}$ ), то целесообразно провести аналогичный расчет для следующего ряда в сторону разрежения (например, R40).

2. Определяем себестоимость валов с длинами, соответствующими размерному ряду R40. Результаты расчетов сводим в табл. 10.3.

Ряд длин вала строим на основании исходного и приложения М.

Годовую программу для «новых» длин относительно исходного ряда определяем по формуле 6, затраты на материалы – по формуле 7.

Остальные параметры определяем по аналогии с рядом R10, результаты заносим в таблицу 10.3. Значение прочих затрат для членов исходного ряда вычисляются по формуле 10.6. Для новых членов  $S_{пр}$  определяют методом интерполяции пропорционально величинам интервалов размеров нового ряда.

Таблица 10.3

Результаты расчета ряда R40

Длина вала l, мм	Годовая программа $V_{нr}$ тыс. шт.	Затраты на материалы, $M_{рr}$ руб.	Коэффициент изменения		Прочие затраты, $S_{пр} = S'_{пр} \cdot K_{из}$ , руб.	Себестоимость одного изделия, $C' = M + S_{пр}$	Годовые затраты в производстве, $C'_r = C'V_{нr}$ , руб
			про-граммы $K_{и.п.}$	про-чих затрат $K_{из}$ .			
1	2	3	4	5	6	7	8
400	10	84	1	1	42	126	1260
420	8	87	-	-	46	133	1064
450	8	90	0,5	1,15	52	142	1136
480	1,5	93	-	-	57	150	225
500	1,5	96	0,5	1,15	61	157	236
530	5	99	-	-	100	199	995
560	5	102	0,5	1,15	139	241	1205
600	1,8	108	-	-	141	249	448
630	1,8	113	3,78	1,15	142	255	459

Итого:  $\Sigma C'_{r R10} = 7028$  руб.

Суммарная годовая себестоимость в объеме годовой программы для ряда R40 -  $\Sigma C'_{r R40} = 7028$  руб.

Вывод: сравнение данных, полученных в таблицах 10.1, 10.2 и 10.3, показывает, что минимальной себестоимости со-

ответствует использованию ряда R10, а максимальной – ряда R40. Таким образом, по критерию себестоимости для валов оптимальным рядом будет R10. Использование валов, длины которых основаны на этом ряде, производится с минимальными затратами в сфере производства.

#### **10.4. Задачи для самостоятельного решения**

**Задача 10.4.1.** Определить предпочтительное число ряда для числа 125; 1250; 0,125; 0,00125

**Задача 10.4.2.** Найти номера предпочтительных чисел 1,12; 11,2; 112; 1120; 11200; 112000

**Задача 10.4.3.** Найти номера предпочтительных чисел 145; 275; 5600; 870000.

**Задача 10.4.4.** Найти номера предпочтительных чисел 950; 0,95; 0,0715; 0,00855.

**Задача 10.4.5.** Определить значения предпочтительного числа по номеру ряда: 10; 19; 290; 3700.

**Задача 10.4.6.** Определить значения предпочтительного числа по номеру ряда: 82; 277; 590; 3010.

**Задача 10.4.7.** Определить значения предпочтительных чисел по номерам рядов: -8; -11; -311; 5000.

**Задача 10.4.8.** Найти номера предпочтительных чисел: 0,7; 0,14; 0,111; 0,0023.

**Задача 10.4.9.** Найти номера предпочтительных чисел: -3,4; -0,15; -0,027; -0,0078; -0,00021.

**Задача 10.4.10.** Найти номера предпочтительного числа 755 и определить значения предпочтительного числа по номеру 1250.

**Задача 10.4.11.** Обозначьте ряд, если известно, что:

а) изделие должно иметь размеры: 1,25; 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 7,1;

б) изделие должно иметь размеры: 125; 160; 180; 200; 250; 315; 400;

в) 0,1; 0,112; 0,125; 0,14; 0,16; 0,18; 0,2;

г) размеры изделия начинаются с размера 6,00 и имеют знаменатель геометрической прогрессии, равный 1,06;

д) изделия должны содержать размер 45 и иметь знаменатель геометрической прогрессии, равный 1,12;

е) размеры изделий начинаются с 80 и имеют знаменатель геометрической прогрессии, равный 2;

ж) размеры изделий начинаются со 140, заканчиваются 450, содержат значение 300 и имеют знаменатель геометрической прогрессии, равный 1,4.

**Задача 10.4.12.** Пользуясь таблицей приложения М и свойствами рядов предпочтительных чисел, выполните следующие действия:

а) перемножьте 1,80 на 4,50;

б) разделите 5,6 на 1,6;

в) перемножьте 315 на 710;

г) разделите 950 на 15;

д) возведите в степень 4,74<sup>4</sup>;

е) перемножьте 0,112 на 0,025;

ж) разделите 0,067 на 0,00132;

з) возведите в степень 3,55<sup>-6</sup>.

**Задача 10.4.13.** Емкость резервуара в виде прямоугольного параллелепипеда должна удовлетворять ряду R20/6 (2...80). Рассчитайте, каким параметрическим рядам должны удовлетворять значения длины  $l$ , ширины  $s$  и высоты  $h$  резервуара, если соотношения сторон  $l:s=2$  и  $s:h=2$ .

**Задача 10.4.14.** Выберите ряды параметров диаметра  $D$  и высоты  $H$  резервуаров в виде цилиндра и запишите обозначения рядов, если соотношение  $D:H=1:2,5$  и значения объемов резервуара выраженные в литрах, приняты по ряду R10/4 (40...1600).

**Задача 10.4.15.** Получены расчетные значения диаметров  $d$  цапфы вала, равные 2,04; 3,58; 6,32; 11; 21; 36; 62 мм. Определите и обозначьте стандартный параметрический ряд для этих значений, выберите стандартные значения номинальных размеров цапфы вала. Определите стандартные значения длины цапфы вала  $l$ , если соотношение  $l:d=2,5$ .

**Задача 10.4.16.** Установлен ряд номинальных значений тяговых усилий  $P$  протяжных станков: 0,63 – 1,25 – 2,5 – 5 – 10 – 20 – 40 – 80 – 100 Н. Определите и обозначьте стандартный пара-

метрический ряд тяговых усилий. Определите стандартный ряд и значения диаметров  $D$  гидроцилиндра при их взаимосвязи в виде функциональной зависимости:

$$P = \frac{\pi \cdot F}{4} \cdot D^2.$$

При условии, что значения диаметров начинаются с 45 мм.

**Задача 10.4.17.** Ряд значений грузоподъемности подъемно-транспортного механизма имеет вид: 1000 – 1600 – 2500 – 4000 – 6300 – 10000 Н. Определите параметрический ряд и стандартные значения диаметра каната, связанного с грузоподъемностью  $P$  функциональной зависимостью:

$$P = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sigma,$$

где  $\sigma$  - предельно допустимое напряжение материала каната,  $\sigma = 100 \text{ Н/мм}^2$ .

**Задача 10.4.18**

Определить ряд:

- 1) достоинства монет: 1-5-10-50 коп; 1-2-5-10 руб;
- 2) 1-2-4-8-16-32-64-...
- 3) 1-1,6-2,5-4,0-6,3-10,0-16,0-...
- 4) 1-1,6-2,5-4,0-6,3-10,0-16,0 -...
- 5) 1,0-1,12- 1,25-1,4-1,6-1,8- 1,9-2,0-2,12-2,24-2,36-2,5.

**Задача 10.4.19**

Какие ряды представлены следующим обозначением, записать эти ряды:

- 1) R40 (15...190); 2) R10 (...50); 3) R20/3 (14...40); 4) R40/5 (...60);
- 5) R10/3 (...80...); 6) R5 (...40...).

**Задача 10.4.20**

Определить являются ли членами какого-либо ряда предпочтительных чисел числа, выражающие:

- 1) периметр и площадь квадрата, площадь поверхности и объема куба со стороной  $a = 2 \text{ см}, 3 \text{ см}$ ;
- 2) периметр и площадь прямоугольника, площадь поверхности и объем параллелепипеда со сторонами

$\alpha = 2 \text{ см}$ ,  $b = 2 \alpha$ , и высота параллелепипеда  $h = 2,5 \alpha$ ;  $2,7 \alpha$ ;

3) периметр и площадь круга и объем шара при  $r = 20 \text{ мм}$ ;

4) работу и мощность силы  $P = 80 \text{ Н}$ , передвигающей тело со скоростью  $3,2 \text{ м/с}$  (векторы силы и скорости направлены в одну сторону по одной прямой);

5) момент силы  $P = 31 \text{ Н}$ , приложенной на плече  $l = 2,5 \text{ м}$ ?

### Задача 10.4.21

Установлено изготовление внутренних диаметров по ряду R20,  $z = 0,2$ . Обосновать экономическую целесообразность изготовления этих валов с диаметрами по ряду R10 и R40. Исходные данные по вариантам приведены в табл. 10.4

Таблица 10.4

Исходные данные по вариантам, ряд R20

Номер варианта	Диаметр вала, мм	Годовая программа $V_n$ , тыс. шт.	Затраты на материалы, $M_p$ , руб.	Прочие затраты, $S_{пр}$ , руб.	Номер варианта	Диаметр вала, мм	Годовая программа $V_n$ , тыс. шт.	Затраты на материалы, $M_p$ , руб.	Прочие затраты, $S_{пр}$ , руб.
1	200	7	60	35	2	425	12	45	22
	224	8	66	42		475	10	48	30
	250	5	70	45		530	6	50	33
	280	9	75	52		600	11	65	36
	315	4	78	56		670	4	74	41
3	10	5	35	25	4	140	2	83	50
	11,2	4	46	33		160	5	87	55
	12,5	7	52	40		180	3	90	62
	14	10	56	42		200	6	95	65
	16	12	65	46		224	4	110	68

Продолжение таблицы 10.4

5	125	4	75	36	6	40	10	80	45
	140	6	82	38		45	5	84	47
	160	5	86	43		50	3	92	50
	180	8	91	47		56	8	98	53
	200	3	96	59		63	2	102	55
7	50	2	63	30	8	15	6	55	23
	56	7	67	32		17	8	58	27
	63	6	72	36		19	5	63	30
	71	4	75	39		21,2	10	66	32
	80	2	78	41		23,6	7	70	35
9	300	2	95	43	10	2800	3	120	66
	335	4	105	46		3150	5	135	72
	375	5	110	49		3550	4	146	78
	425	3	115	51		4000	2	200	82
	475	2	120	53		4500	3	230	85
11	1120	2	115	55	12	3550	4	162	75
	1250	3	120	58		4000	3	165	80
	1400	2	132	62		4500	5	168	83
	1600	4	144	66		5000	2	172	88
	1800	3	150	70		5600	3	175	92
13	60	5	76	37	14	132	2	98	42
	67	4	80	39		150	3	102	45
	75	2	83	44		180	2	110	48
	85	3	85	46		200	4	114	50
	95	6	92	49		224	3	120	52
15	25	10	56	25	16	500	4	104	50
	28	5	60	32		560	5	110	52
	31,5	12	70	35		630	3	116	55
	35,5	6	75	38		710	6	120	60
	40	8	80	40		800	2	125	63
17	2000	2	150	77	18	224	4	80	43
	2240	2	156	79		250	5	86	47
	2500	3	162	83		280	7	88	50
	2800	4	167	86		315	3	95	56
	3150	3	172	90		355	6	103	60
19	1000	3	145	80	20	17	8	90	43
	1120	4	152	86		19	6	93	46
	1250	3	155	92		21,2	7	97	50
	1400	5	163	97		23,6	4	102	55
	1600	2	168	100		26,5	3	105	57

Окончание таблицы 10.4

21	450	12	85	41	22	265	5	73	32
	500	10	92	45		300	4	77	36
	560	5	95	47		335	5	79	41
	630	6	98	53		375	3	84	45
	710	8	104	55		425	6	87	48
23	22,4	9	76	32	24	125	3	86	42
	25	4	79	36		140	2	90	45
	28	6	85	39		160	4	93	48
	31,5	3	87	41		180	6	97	51
	35,5	5	90	44		200	5	99	53
25	265	3	83	38	26	18	4	58	25
	300	2	87	41		20	7	62	28
	335	4	89	44		22,4	9	67	33
	375	7	104	47		25	6	72	35
	425	6	110	50		28	5	75	37
27	1,4	10	35	15	28	3,15	8	52	22
	1,6	6	38	17		3,55	7	55	24
	1,8	12	41	20		4,0	4	58	25
	2,0	5	45	22		4,5	5	61	28
	2,24	7	48	24		5,0	3	65	30
29	5,0	8	47	26	30	26,5	10	55	23
	5,6	6	50	28		30,0	7	59	25
	6,3	4	55	31		33,5	3	63	28
	7,1	3	58	35		37,5	2	66	30
	8,0	2	61	37		42,5	5	69	33

## 11. УРОВЕНЬ УНИФИКАЦИИ И СТАНДАРТИЗАЦИИ

### 11.1. Основные положения

Под уровнем унификации и стандартизации изделий понимается насыщенность их стандартными, унифицированными, заимствованными и покупными составными частями (понятие «составная часть изделия» - по ГОСТ 2.101).

Показателями уровня унификации и стандартизации изделия являются:

1) коэффициент применяемости ( $K_{пр}$ ), который характеризует степень насыщенности изделия стандартными, заимствованными, покупными и унифицированными в отрасли промышленности составными частями.

Он определяется в натуральном и стоимостном выражении по формулам:

– в натуральном выражении

$$K_{пр}^T = \frac{N - N_o}{N} 100\% \quad (\text{по типоразмерам}); \quad (11.1)$$

$$K_{пр}^M = \frac{M - M_o}{M} 100\% \quad (\text{по штукам}); \quad (11.2)$$

– в стоимостном выражении

$$K_{пр}^C = \frac{C - C_o}{C} 100\% \quad (11.3)$$

где  $N$ ,  $M$  – общее количество типоразмеров и штук составных частей в изделии, соответственно;

$N_o$ ,  $M_o$  – количество типоразмеров и штук оригинальных составных частей в изделии, соответственно;

$C$ ,  $C_o$  – общая стоимость и стоимость оригинальных составных частей в изделии, соответственно.

Оценка коэффициента применяемости в определенной степени характеризует мероприятия конструктора, направленные на снижение себестоимости изделия в производстве;

2) коэффициенты повторяемости ( $K_n$ ) и внутрипроектной унификации ( $K_{\text{вн}}$ ) характеризуют повторяемость и рациональную степень сокращения составных частей в изделии.

Они определяются по формулам, соответственно:

$$K_n = \frac{N}{M}; \quad (11.4)$$

$$K_{\text{вн}} = \frac{\ln K_n}{\ln M} = 1 - \frac{\ln N}{\ln M}; \quad (11.5)$$

Оценка коэффициента по внутрипроектной унификации направлена на снижение материальных затрат при эксплуатации изделия и улучшение технического обслуживания.

3) коэффициент межпроектной унификации ( $K_{\text{мж}}$ ) является показателем унификации группы изделий. Он характеризует сокращение номенклатуры составных частей нескольких изделий (образцов), объединенных в одну функциональную группировку для выполнения сложных эксплуатационных задач, и определяется по формуле:

$$K_{\text{мж}} = \frac{\sum_i^n N_i - D}{\sum_i^n N_i - N_{\text{max}}} 100\% \quad (11.6)$$

где  $n$  – общее количество входящих в функциональную группировку образцов;  $i=1, 2, \dots, n$ .

$N_i$  – количество типоразмеров составных частей в  $i$ -том образце;

$D = \bigcup_n^n N_i$  – общее количество типоразмеров составных частей,

примененных в группировке из « $n$ » образцов, и представляет собой логическую сумму составных частей.

$N_{\text{max}}$  – максимальное количество типоразмеров составных частей одного образца в группировке.

## 11.2. Вопросы для самопроверки

1. Что такое уровень унификации и стандартизации?
2. Для чего необходимо устанавливать требования по уровню унификации и стандартизации в технических условиях на разработку изделий?
3. Для чего проводится оценка коэффициентов применяемости?
4. Для чего проводится оценка коэффициентов внутрипроектной унификации?
5. Для чего проводится оценка коэффициента межпроектной унификации?
6. В чем отличия при расчетах суммарного коэффициента типоразмеров составных частей от общего количества типоразмеров составных частей в функциональной группировке образцов?
7. Приведите основную формулу стандартизации.
8. В чем отличия и сходства понятий «унификация» и «симплификация»?
9. На каких этапах разработки сложных изделий работы по унификации и стандартизации приносят ощутимый эффект?
10. В каких практических ситуациях имеют смысл работы по унификации и стандартизации?
11. Назовите основные методы и формы стандартизации.
12. Что составляет теоретическую основу комплексной унификации?
13. Что составляет теоретическую основу опережающей стандартизации?
14. Что составляет теоретическую основу ограничительной стандартизации?
15. В чем сходства и отличия внутрипроектной и межпроектной унификации?

### 11.3. Примеры решения типовых задач

#### Задача 11.3.1.

Определить уровень унификации и стандартизации продольно-обрабатывающего станка. Общее число типоразмеров составных частей (деталей)  $N=1657$ , число оригинальных типоразмеров  $N_o=203$ . Общее количество деталей  $M=5402$  шт., оригинальных  $M_o=620$  шт. Стоимость всех деталей  $C=85$  тыс.руб., оригинальных  $C_o=27,2$  тыс.руб. (в ценах 2000г.)

#### Решение

1. Коэффициенты применяемости:

- по типоразмерам

$$K_{\text{пр}}^{\text{т}} = \frac{1657 - 203}{1657} \cdot 100\% = 87,7\%;$$

- по количеству штук

$$K_{\text{пр}}^{\text{ш}} = \frac{5402 - 620}{5402} \cdot 100\% = 88,5\%;$$

- в стоимостном выражении

$$K_{\text{пр}}^{\text{с}} = \frac{85,0 - 27,2}{85,0} \cdot 100\% = 68\%;$$

2. Коэффициенты унификации:

- коэффициент повторяемости  $K_{\text{п}} = \frac{5402}{1657} = 3,2$ ;

- коэффициент внутрипроектной унификации

$$K_{\text{ву}} = \frac{\ln K_{\text{п}}}{\ln M} \cdot 100\% = \frac{1,163}{8,595} \cdot 100\% = 13,53\%;$$

## Выводы

При конструировании продольно-обрабатывающего станка достигнут достаточно высокий процент использования деталей отраслевого и межотраслевого применения. В стоимостном выражении применяемость составляет 68%, что соответствует среднему значению по отрасли.

Коэффициент унификации ( $K_{\text{п}}=3,2$ ) достаточно высокий, о чем свидетельствует его нормируемый показатель  $K_{\text{вн}}= 13,53\%$ .

### 11.4. Задачи

Задача 11.4.1. Предприятием выпускается 8 типов автомобилей. Определить уровни унификации и стандартизации для каждого типа автомобиля и уровень межпроектной унификации группы выпускаемых предприятием автомобилей, если известно что общее количество типоразмеров в группе 7225 шт. Провести анализ и дать заключение по проведенной работе КБ предприятия. Исходные данные для расчета приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1  
Исходные данные

Наименование изделия	Число типоразмеров		Число деталей (шт)		Стоимость деталей (тыс.руб.)	
	Общее количество	Количество -во оригинал.	Общее количество	Количество -во оригинал.	Общая стоимость	Стоимость оригинал.дет.
A <sub>1</sub>	2005	110	11190	780	24,258	5,384
A <sub>2</sub>	1910	105	10725	754	23,252	5,2
A <sub>3</sub>	2500	95	11046	763	23,252	5,2
A <sub>4</sub>	2450	100	1190	760	24,258	5,244
A <sub>5</sub>	2100	115	11511	766	24,956	5,285
A <sub>6</sub>	1845	110	11511	798	24,956	5,5
A <sub>7</sub>	2003	110	11190	763	24,258	5,26
A <sub>8</sub>	2005	97	11511	770	24,956	5,313

Задача 11.4.2. Определить уровень унификации и стандартизации автомобиля для составных частей и в целом по представленному образцу. Провести анализ и дать заключение по

проведенной работе конструктора. Исходные данные представлены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Исходные данные

Наименование изделий	Число типоразмеров		Число деталей (шт)		Стоимость деталей ( тыс.руб.в ценах на 2000 г.)	
	Общее количество	Количество оригинал.	Общее количество	Количество оригинал.	Общ. стоим.	Стоим. оригинал. дет.
1.Двигатель	321	8	1334	10	3,5	0,1
2.Система питания	306	1	877	1	0,56	0,08
3.Сцепление	57	-	439	-	0,09	1,35
4.Коробка передач	103	5	250	5	0,77	0,6
5.Раздаточная коробка	166	11	378	12	0,88	0,79
6.Карданный вал	75	4	562	4	0,92	0,12
7.Передний мост	93	3	465	6	2,1	-
8. Задний мост	63	-	320	-	0,83	4,3
9. Средний мост	69	-	321	-	0,71	-
10.Рама	92	10	484	10	3,25	-
11.Рулевая тяга	24	-	63	-	0,11	2,4
12.Рулевое управление	60	-	115	-	0,69	0,2
13.Тормоз	420	35	1648	62	2,3	-
14.Спецоборудование	157	27	719	34	0,6	-

Задача 11.4.3. Проведен анализ конструкторской документации десяти сложных радиоэлектронных устройств, входящих в одну функциональную группу. По ведомостям спецификаций и покупных изделий исходные данные по сборочным единицам функционального назначения (модули, ячейки, интегральные схемы и т.д.) сведены в таблице 3. Определить уровень унификации и стандартизации изделий в группе и уровень межпроектной унификации, если известно, что общее количество типоразмеров сборочных единиц в функциональной группе составляет 9075 типоразмеров.

Таблица 11.3

## Исходные данные

№ типов изделий в группе	Число типоразмеров		Общ. кол-во сборочных единиц	
	Общее количество	Количество станд, унифиц.	Общее количество	Количество станд, унифиц.
1	176	48	1604	145
2	370	130	6000	1500
3	250	68	9120	820
4	830	398	4780	2151
5	1200	312	66000	17820
6	1172	445	100000	29000
7	1995	1017	241570	41067
8	3200	1216	425000	76500
9	3500	1435	666000	139860
10	4250	1360	679850	108776

По результатам оценки уровня провести анализ с выбором наилучшего и наихудшего варианта с точки зрения интересов производства и эксплуатации изделий, а также определить рациональный (оптимальный) вариант изделия по уровню унификации и стандартизации из приведенных в табл.11.3.

Задача 11.4.4. Определить уровень унификации и стандартизации для составных частей и в целом по вычислительному комплексу «ЕС-1133», а также общее количество типоразмеров составных частей в комплексе, если коэффициент межпроектной унификации равен 0,45. Исходные данные, приведенные в табл.11.4.

Задача 11.4.5. Функциональная группировка состоит из 5 образцов изделий, производимых различными промышленными предприятиями. Типоразмеры составных частей в изделиях обозначены буквами, а их количество в штуках приведены в скобках.

Определить показатели унификации в каждом из приведенных образцов и в группировке в целом. Провести анализ результативности мероприятий конструкторов по рациональному сокращению типоразмеров в каждом изделии и состоянию номенклатуры составных частей в функциональной группе.

Таблица 11.4

## Исходные данные

Составные части комплекса	Число типоразмеров		Общ. кол-во сборочных единиц	
	Общее количество	Количество станд, унифиц.	Общ. количество	Количество станд, унифиц.
1	55281	1697	743000	183361
2	1034	667	101691	34915
3	1200	550	99000	46000
4	670	240	5690	2387
5	4300	1542	531000	87600
6	150	67	1840	118
7	470	240	8600	2200
8	1550	496	78000	19082
9	17583	1346	321769	58042
10	985	467	7320	3621
11	225	53	8393	875
12	1178	747	987560	23400
13	5600	2100	767000	126481
14	1326	413	88000	21000
15	386	145	9000	1700
16	1134	643	112900	31800
17	3600	17961	578000	213000
18	1437	889	99000	44000
19	126	73	1762	116
20	997	471	5631	3111

Таблица 11.5

## Исходные данные

№ изделия в группе	Наименования (буквенные) типоразмеров и их количество (в штуках)
1	A(1604); B(6000); C(8689); d(9120); e(19950); z(2500)
2	f(22385); k(25112); l(39795); m(47800); n(57622)
3	A(66000); B(89000); C(100000); d(158300); n(241570); k(25052); g(3500)
4	A(4250); f(6660); n(67985); d(1500); g(2000)
5	g(4123); k(4413); f(28808); B(48063); n(49604); m(6929); A(80795); c(146688); d(16388); l(17591)

Задача 11.4.6. Определить уровень стандартизации и унификации комбайна производства ОАО «РОСТСЕЛЬМАШ» для составных частей и в целом по образцу. Исходные данные представлены в табл. 11.6.

Таблица 11.6

## Исходные данные

№ п/п	Наименование составных частей комбайна	Число типоразмеров (т/р)				Число штук (шт)	
		№с	№з	№о	№п	М	Мо
1	Жатка	52	324	50	74	1453	178
2	Наклонная камера	5	15	480	0	2365	2215
3	МСУ	18	28	750	4	1782	1625
4	Очистка	48	85	590	27	1231	952
5	Бункер с выгрузным устройством	26	123	380	21	1315	856
6	Кабина	192	201	50	157	2587	223
7	Площадка входа	36	60	30	24	324	86
8	Блок измельчителя	38	8	8	6	248	62
9	МВК	21	102	50	27	726	123
10	МУК	14	32	5	9	276	25
10	Моторная установка	89	9	385	17	1638	1028
11	Капотирование	85	35	370	10	752	462
12	Гидрооборудование	27	19	130	24	769	543
13	Электрооборудование	10	0	60	0	395	300
Всего по комбайну		661	1041	3338	400	15861	8678

## 12. ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАНДАРТИЗАЦИИ

### 12.1. Основные положения

Технико-экономическая эффективность стандартизации во многом определяется показателями качества продукции, которые устанавливаются стандартами.

При определении эффективности внедрения стандартов в рамках отдельных предприятий необходимо учитывать два варианта:

первый вариант – стандарт содержит определенные требования к качеству продукции и разработан с целью ее улучшения;

второй вариант – стандарт предназначен для сокращения необходимого многообразия изготавливаемых изделий, технологического оборудования, оснастки, методов производства и т.д.

*12.1.1. Методика расчета экономического эффекта при внедрении стандарта с целью улучшения качественных характеристик продукции (первый вариант)*

В этом случае экономия определяется отдельно для сфер потребления и производства, так как у потребителя, как правило, «внедрение стандарта на машину с улучшенными показателями качества должно обеспечить экономию средств, в то время как изготовление такой машины обычно сопряжено с дополнительными затратами для производства /2/.

Общий годовой экономический эффект от внедрения стандарта на машину с улучшенными параметрами рассчитывается по формуле:

$$Э_{ст} = [(C_1 - C_2) - E_n(K_2 - K_1)] \cdot A_2, \quad (12.1)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - себестоимость готовой продукции, изготовленной с помощью одной машины, соответственно до и после стандартизации;

$K_1$  и  $K_2$  - цена одной машины до и после стандартизации;

$A_2$  - число машин улучшенного качества, подлежащих эксплуатации у потребителя;

$E_n$  – нормативный коэффициент эффективности.

Величина приведенных затрат на единицу продукции в руб. представляет собой сумму издержек производства и нормативной прибыли:

$$Z = C + E_n \cdot K \quad (12.2)$$

где  $C$  – себестоимость единицы продукции;

$$E_n = 0,15 - 0,25;$$

$K$  – удельные капитальные вложения в основные оборотные производственные фонды, руб.

Лучшим вариантом считается стандарт, внедрение которого обеспечивает народному хозяйству минимальные приведенные затраты ( $E_n \cdot K \rightarrow \min$ ) и срок окупаемости капиталовложений  $T_{ок.н}$  в пределах его нормативной величины ( $T_{ок.н} = \frac{1}{E_n} \leq 6,6$  г.).

### *12.1.2 Методика расчета экономического эффекта при внедрении стандарта с целью улучшения производственного процесса (второй вариант)*

В этом случае в процессе стандартизации не изменяются эксплуатационные свойства выпускаемых изделий и экономическую эффективность от мероприятий по стандартизации определяют по месту изготовления изделий путем сопоставления капитальных вложений и себестоимости до и после внедрения стандарта:

$$\Delta_{ст} = [(C_1 + E_n K_1) - (C_2 + E_n K_2)] \cdot A_2, \quad (12.3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – себестоимость изделия до и после стандартизации,  
 $K_1$  и  $K_2$  – удельные капитальные затраты на производство изделия до и после стандартизации,  
 $A_2$  – число изделий, выпускаемых после изготовления стандартизации

## 12.2. Вопросы для самопроверки

1. Почему оценке подлежит технико-экономическая эффективность стандартизации, а не отдельно: «техническая» или «экономическая» эффективности?
2. Что представляет собой экономический эффект от внедрения стандарта?
3. Как понимать термин «себестоимость готовой продукции»?
4. В чем состоит смысл коэффициента  $E_n$ ?

## 12.3. Примеры решения типовых задач

### Задача 12.3.1.

В результате совершенствования конструкции машины и улучшения эксплуатационных показателей ее качества себестоимость изготовления машины снизилась с 8000 руб. до 7000 руб. При этом стоимость изготовления машины за счет появления дополнительных затрат увеличилась с 1000 руб. до 1700 руб. Потребность в таких машинах составила 1500штук/год. Определите годовой экономический эффект от внедрения стандарта на машину.

**Дано:**  $C_1=8000$  руб.,  $C_2=7000$  руб.;  $K_1=1000$  руб.;  $K_2=1700$  руб.;  $A_2=1500$  штук/год;  $E_n=0,15$

#### **Решение**

$$\mathcal{E}_{ст} = [(8000-7000) - 0,15 (1700 - 1000)] 1500;$$

$$\mathcal{E}_{ст}=134 \text{ тыс.руб.}$$

### Задача 12.3.2.

В результате стандартизации элементов технологического процесса изготовления изделий большинство универсальных приспособлений было заменено на более производительные сборно-разборные. При этом себестоимость изделий снизилась с 1500 руб. до 1400 руб., а удельные капитальные затраты возросли со 100 руб. до 160 руб. Количество выпускаемых предприятиями изделий до и после стандартизации 3000 штук/год.

Определить годовую экономию от проведенного мероприятия по стандартизации на предприятии.

Дано:  $C_1=1500$  руб.,  $C_2=1400$  руб.;  $K_1=100$  руб.;  $K_2=160$  руб.;  $A_2=3000$  штук/год;  $E_n=0,15$

**Решение**

$$\mathcal{E}_{\text{ст}} = [(1500 + 0,15 \times 100) - (1400 + 0,15 \times 160)] \times 3000;$$

$$\mathcal{E}_{\text{ст}} = 273 \text{ тыс.руб.}$$

## 12.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 12.4.1.** С целью повышения конструктивно-эксплуатационных показателей качества машины предлагаются три варианта модернизации существующей конструкции машины. Определите оценку экономической эффективности от внедрения стандарта и оптимальный вариант модернизации конструкции машины. В качестве исходных данных взять значения себестоимости ( $C_1, C_2$ ) и цены машины ( $K_1, K_2$ ) до и после стандартизации, которые приведены в табл. 12.1 – 12.10.

Число машин, подлежащих эксплуатации у потребителя, считать постоянным для всех вариантов  $A_2 = 200$  штук/год.

**Задача 12.4.2.** На заводе в результате сокращения количества однотипных, внешне похожих друг на друга моделей бытового оборудования налажился выпуск разнообразных по назначению, внешнему виду бытовых устройств и возрос экономический эффект.

Рассчитать экономический эффект, полученный за счет сокращения необходимого многообразия выпускаемых бытовых устройств, и определить оптимальный вариант из трех возможных.

В качестве исходных данных взять значения себестоимости ( $C_1, C_2$ ) и цены машины ( $K_1, K_2$ ) до и после стандартизации, которые приведены в табл. 12.1 – 12.10.

Таблица 12.1

**Исходные данные**  
**Объем выпуска холодильников -1200 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	2	1,5	2,7	1,9	9,5	7,3	11,3	9,4	8,9	6,7	9,7	8,2

Таблица 12.2

**Исходные данные**  
**Объем выпуска кухонных комбайнов -5200 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	9,5	7,7	11,2	8,5	7,3	4,1	19,5	16,3	5	3	6,2	4,5

Таблица 12.3

**Исходные данные**  
**Объем выпуска микроволновых печей -2500 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	3,8	1,9	5,2	3,7	9,2	7,4	11,3	9,5	7	4	8	5,5

Таблица 12.4

**Исходные данные**  
**Объем выпуска соковыжималок -2200 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	7,2	5,8	8,9	7,1	5,9	3,4	8,4	6,1	7,3	4,5	9,4	5,7

Таблица 12.5

**Исходные данные**  
**Объем выпуска пылесосов -4200 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	4,2	2,9	5,7	4,1	8,8	5,9	11,4	7,7	6,5	5,5	9,6	10,2

Таблица 12.6

**Исходные данные**  
**Объем выпуска телевизоров -8000 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	7,7	6,1	9,1	7,8	14,5	9,3	17,1	12,5	2	1,5	2,7	1,9

Таблица 12.7

**Исходные данные**  
**Объем выпуска музыкальных центров -1200 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	4,3	2,8	5,1	4,7	16,3	11,6	19,5	14,1	9,5	7,3	11,3	9,4

Таблица 12.8

**Исходные данные**  
**Объем выпуска фенов -3200 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	10,3	7,9	12,1	8,9	4,1	2,9	7,4	5,1	8,9	6,7	9,7	8,2

Таблица 12.9

**Исходные данные**  
**Объем выпуска холодильных шкафов -1900 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	15,1	12,4	17,5	14,3	19,1	16,4	23,1	18,9	6,3	4,7	7,6	5,2

Таблица 12.10

**Исходные данные**  
**Объем выпуска видеомэгнитофонов -4000 штук/год**

	$C_1^1$ , тыс. руб.	$C_2^1$ , тыс. руб.	$K_1^1$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^2$ , тыс. руб.	$C_2^2$ , тыс. руб.	$K_1^2$ , тыс. руб.	$K_2^2$ , тыс. руб.	$C_1^3$ , тыс. руб.	$C_2^3$ , тыс. руб.	$K_1^3$ , тыс. руб.	$K_2^3$ , тыс. руб.
	5,5	2,9	7,2	9,1	12,1	9,8	14,5	11,7	5,4	3,2	6,5	4,4

Приложение А

**Значение процентных пределов  $t$  в зависимости от  $k$  степеней свободы и от вероятности для распределения Стьюдента**

$k \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,997	0,998	0,999
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,36	212,2	318,3	636,6
2	2,29	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,6
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,61
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,8	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,86	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,25	3,69	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,56	2,681	3,055	3,428	3,706	3,93	4,318
14	1,761	2,145	2,51	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,14
16	1,746	2,12	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,61	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,25	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,36	2,457	2,75	3,03	3,23	3,386	3,646
$\infty$	1,645	1,96	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,09	3,291

Приложение Б

Таблица 1

**Значения функции**  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4813	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4874	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986									
3,5	0,4998									
4,0	0,4999									

Таблица 2

**Ордината нормального распределения**

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,3894	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,3778	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32088	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29658	0,2943	0,292
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,2323	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,1781	0,17585	0,1736
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15394	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,1435	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,1145	0,1127
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,0878	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,0573	0,05618	0,05508
2	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,0498	0,04879	0,0478	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,0347	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,0116	0,0113	0,011	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,0077	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,0053	0,00514	0,00499	0,00485	0,0047	0,00457
3	0,00443									
3,5	$87 \cdot 10^{-5}$									
4	$13 \cdot 10^{-5}$									
4,5	$16 \cdot 10^{-6}$									
5	$14 \cdot 10^{-7}$									

**Значения  $\alpha$ -процентных точек распределения**

$$tr = \frac{\max |x_i - \bar{x}|}{\sigma} \quad \text{для критерия Романовского}$$

Число наблюдений n	Уровень значимости $\alpha, \%$				
	0,1	0,5	1	5	10
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
4	1,732	1,730	1,728	1,710	1,689
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
6	2,212	2,183	2,161	2,067	1,996
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093
8	2,547	2,476	2,431	2,273	2,172
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
10	2,788	2,680	2,616	2,414	2,294
11	2,884	2,760	2,689	2,470	2,343
12	2,969	2,830	2,753	2,519	2,387
13	3,044	2,892	2,809	2,563	2,426
14	3,111	2,947	2,859	2,602	2,461
15	3,171	2,997	2,905	2,638	2,494
16	3,225	3,042	2,946	2,670	2,523
17	3,274	3,083	2,983	2,701	2,551
18	3,320	3,120	3,017	2,728	2,577
19	3,361	3,155	3,049	2,754	2,601
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623
21	3,436	3,217	3,106	2,801	2,644
22	3,469	3,245	3,132	2,823	2,664
23	3,500	3,271	3,156	2,843	2,683
24	3,529	3,295	3,179	2,862	2,701
25	3,556	3,318	3,200	2,880	2,718
26	3,582	3,340	3,220	2,897	2,734
27	3,606	3,360	3,239	2,913	2,749
28	3,629	3,380	3,258	2,929	2,764
29	3,651	3,399	3,275	2,944	2,778
30	3,672	3,416	3,291	2,958	2,792

## Приложение Г

**Значения критерия Шарлье**

$n$	5	10	20	30	40	50	100
$K_{ш}$	1,3	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

## Приложение Д

**Значения критерия Диксона**

$n$	$Z_q$ при $q$ равном			
	0,10	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,3
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,31	0,34

Процентные точки  $\chi^2$ -распределения

$P/v$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	0,1015	0,4549	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,83
2	0,01	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,21	10,6	13,82
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84	16,27
4	0,207	0,2971	0,4844	0,7107	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,145	1,61	2,675	4,351	6,626	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,635	2,024	3,455	5,348	7,841	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,9893	1,239	1,69	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	1,344	1,646	2,18	2,733	3,49	5,071	7,344	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	1,735	2,088	2,7	3,325	4,168	5,899	8,343	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	2,156	2,558	3,247	3,94	4,865	6,737	9,342	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,34	13,7	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,3	32,91
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,58
14	4,075	4,66	5,629	6,571	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,04	14,34	18,25	22,31	25	27,49	30,58	32,8	37,7
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,91	15,34	19,37	23,54	26,3	28,85	32	34,27	39,25
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	6,265	7,015	8,231	9,39	10,86	13,68	17,34	21,6	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,2	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	7,434	8,26	9,591	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40	45,32
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	16,34	20,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,4	46,8

## Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
22	8,643	9,542	10,98	12,34	10,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,8	48,27
23	9,26	10,2	11,69	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	9,886	10,86	12,4	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,2	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	11,16	12,2	13,84	15,38	17,29	20,84	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,3
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,6	24,48	29,34	34,8	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,7
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,8	55,76	59,34	63,69	66,77	73,4
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	49,33	56,33	63,17	67,5	71,42	76,15	79,49	86,66
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	52,29	59,33	66,98	74,4	79,08	83,3	88,38	91,95	99,61
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,7	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2	112,3
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,14	79,33	88,13	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3	124,8
90	59,2	61,75	65,65	69,13	73,29	80,62	89,33	98,65	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3	137,2
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	90,13	99,33	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2	149,4

Таблица 1

**Значения процентных точек q для распределения  $d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{A}|}{n \cdot S^*}$**

Уровень значимости q, %		Число результатов измерений в группе, n										
		11	16	21	26	31	36	41	46	51	61	71
1-q/2	99,0	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,74
	95,0	0,72	0,72	0,73	0,74	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76
	90,0	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
q/2	10,0	0,89	0,87	0,86	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84	0,84	0,83	0,83
	5,0	0,91	0,89	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85	0,85	0,85	0,84	0,84
	1,0	0,94	0,91	0,90	0,89	0,88	0,88	0,87	0,87	0,86	0,86	0,85

Таблица 2

**Значения доверительной вероятности P для составного критерия**

n		10	11-14	15-20	21,22	23	24-27	28-32	33-35	36-49
m		1	1	1	2	2	2	2	2	2
q/2·100%	1,00	0,98	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99
	2,0	0,98	0,98	0,99	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99
	5,0	0,96	0,97	0,98	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98

**Значения доверительной вероятности  $P(\lambda)$  для критерия Колмогорова-Смирнова**

$\lambda$	$P(\lambda)$	$\lambda$	$P(\lambda)$	$\lambda$	$P(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

**Критерий  $\omega^2$ . Функция распределения  $a_2(x)$**

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
0,1	0,00003	0,00008	0,00020	0,00043	0,00081	0,00141	0,00228	0,00349	0,00508	0,00710
0,2	0,00959	0,01256	0,01605	0,02005	0,02457	0,02961	0,03514	0,04115	0,04762	0,05453
0,3	0,06184	0,06954	0,07759	0,08596	0,09463	0,10356	0,11273	0,12211	0,13168	0,14140
0,4	0,15127	0,16124	0,17132	0,18146	0,19166	0,20190	0,21217	0,22244	0,23271	0,24296
0,5	0,25319	0,26337	0,27351	0,28359	0,29360	0,30355	0,31342	0,32320	0,33290	0,34250
0,6	0,35200	0,36141	0,37071	0,37991	0,38900	0,39798	0,40684	0,41560	0,42424	0,43277
0,7	0,44118	0,44947	0,45765	0,46572	0,47367	0,48150	0,48922	0,49683	0,50432	0,51170
0,8	0,51897	0,52613	0,53318	0,54012	0,54695	0,55368	0,56030	0,56682	0,57324	0,57956
0,9	0,58777	0,59189	0,59791	0,60383	0,60966	0,61540	0,62104	0,62660	0,63206	0,63744
1,0	0,64273	0,64794	0,65306	0,65811	0,66307	0,66795	0,67275	0,67748	0,68213	0,68670
1,1	0,69120	0,69563	0,69999	0,70428	0,70851	0,71266	0,71675	0,72077	0,72473	0,72863
1,2	0,73247	0,73624	0,73996	0,74361	0,74721	0,75075	0,75424	0,75767	0,76105	0,76438
1,3	0,76765	0,77088	0,77405	0,77717	0,78025	0,78328	0,78626	0,78919	0,79209	0,79493
1,4	0,79773	0,80049	0,80321	0,80589	0,80852	0,81112	0,81368	0,81620	0,81868	0,82121
1,5	0,82352	0,82589	0,82823	0,83053	0,83279	0,83503	0,83723	0,83939	0,84153	0,84363
1,6	0,84570	0,84774	0,84975	0,85173	0,85369	0,85561	0,85751	0,85938	0,86122	0,86303
1,7	0,86482	0,86659	0,86832	0,87004	0,87173	0,87339	0,87503	0,87665	0,87824	0,87981
1,8	0,88136	0,88289	0,88439	0,88588	0,88734	0,88878	0,89021	0,89161	0,89299	0,89435
1,9	0,89570	0,89703	0,89833	0,89962	0,90089	0,90215	0,90338	0,90460	0,90581	0,90699
2,0	0,90816	0,90932	0,91046	0,91158	0,91269	0,91378	0,91486	0,91592	0,91697	0,91800
2,1	0,91902	0,92003	0,92102	0,92200	0,92297	0,92392	0,92486	0,92579	0,92671	0,92761
2,2	0,92851	0,92839	0,93025	0,93111	0,93196	0,93279	0,93361	0,93443	0,93523	0,93602
2,3	0,93680	0,93757	0,93833	0,93908	0,93983	0,94056	0,94128	0,94199	0,94269	0,94339
2,4	0,94407	0,94475	0,94542	0,94608	0,94673	0,94737	0,94800	0,94863	0,94925	0,94986
2,5	0,95046	0,95105	0,95164	0,95222	0,95279	0,95336	0,95391	0,95446	0,95501	0,95554
2,6	0,95607	0,95660	0,95711	0,95762	0,95813	0,95862	0,95912	0,95960	0,96008	0,96055
2,7	0,96102	0,96148	0,96194	0,96239	0,96283	0,96327	0,96370	0,96413	0,96455	0,96497
2,8	0,96538	0,96579	0,96619	0,96659	0,96698	0,96737	0,96775	0,96813	0,96850	0,96887
2,9	0,96923	0,96959	0,96995	0,97030	0,97064	0,97099	0,97132	0,97166	0,97199	0,97231
3,0	0,97263	97295	97327	97358	97388	97419	97449	97478	97507	97536
3,1	97565	97593	97621	97648	97675	97702	97729	97755	97781	97806
3,2	97831	97856	97881	97905	97929	97953	97977	98000	98023	98046
3,3	98068	98090	98112	98134	98155	98176	98197	98217	98238	98258
3,4	98278	98297	98317	98336	98355	98374	98392	98410	98429	98447
3,5	0,98464	98482	98499	98516	98533	98549	98566	98582	98598	98614
3,6	98630	98645	98660	98676	98691	98705	98720	98734	98749	98763
3,7	98777	98791	98804	98818	98831	98844	98857	98870	98883	98895
3,8	98908	98920	98932	98944	98956	98968	98979	98991	99002	99013
3,9	99024	99035	99046	99057	99067	99078	99078	99098	99108	99118
4,0	0,99128	99221	99303	99377	99442	99501	99553	99600	99642	99679
4,5	99713	99742	99769	99793	99814	99834	99851	99866	99880	99892
4,6	99903	99913	99922	99930	99937	99944	99949	99954	99959	99963
4,7	99967	99970	99973	99976	99978	99981	99983	99984	99986	99987
4,8	99989	99990	99991	99992	99993	99993	99993	99995	99995	99996
4,9	99996									

Процентные точки  $F$ -распределения  $P=0,95$ 

$V_1 \backslash V_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19	19,16	19,25	19,3	19,33	19,35	19,37	19,38	19,4	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,5
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,7	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6	5,96	5,91	5,86	5,8	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,5	4,46	4,43	4,4	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,1	4,06	4	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,7	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,3	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,9	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,7	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,9	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,4
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3	2,91	2,85	2,8	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,3
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,6	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,36	2,25	2,21
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,7	2,65	2,6	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,4	2,33	2,29	2,25	2,2	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,1	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,2	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,9	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,1	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,3	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,2	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,3	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,9	1,85	1,8	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,253	2,2	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,1	2,03	1,94	1,9	1,85	1,81	1,75	1,7	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,1	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,7	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,07	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,5	1,43	1,35	1,25
$\infty$	3,84	3	2,6	2,37	2,21	2,1	2,01	1,88	1,88	1,83	1,753	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1

**Значения  $T_{q}^{-}$  и  $T_{q}^{+}$  – процентных точек распределения критерия Т для уровня значимости 5%**

n	5				7			8		
m	5	7	10	15	7	10	15	8	10	15
$T_{q}^{-}$	17	20	23	29	36	42	52	49	53	65
$T_{q}^{+}$	38	45	57	76	69	84	109	87	99	127

n	9		10		12		14		15
m	9	15	10	15	12	15	14	15	15
$T_{q}^{-}$	62	79	78	94	115	127	160	164	184
$T_{q}^{+}$	109	146	132	166	185	209	246	256	281

**Основные параметрические ряды R**

Основные ряды				Номер предпочтительного числа
R5	R10	R20	R40	
1,00	1,00	1,00	1,00	0
			1,06	1
			1,12	2
			1,18	3
			1,25	4
			1,32	5
			1,40	6
			1,50	7
			1,60	8
			1,70	9
1,60	1,60	1,60	1,60	10
			1,80	11
			1,90	12
			2,00	13
			2,12	14
			2,24	15
			2,36	16
			2,50	17
			2,65	18
			2,80	19
2,50	2,50	2,50	2,50	20
			2,80	21
			3,00	22
			3,15	23
			3,35	24
			3,55	25
			3,75	26
			4,00	27
			4,25	28
			4,50	29
4,00	4,00	4,00	4,00	30
			4,50	31
			4,75	32
			5,00	33
			5,30	34
			5,60	35
			6,00	36
			6,30	37
			7,10	38
			7,50	39
6,30	6,30	6,30	6,30	40
			6,70	
			7,10	
			8,00	
			8,50	
			9,00	
			9,50	
			10,00	
10,00	10,00	10,00	10,00	

## Содержание

Введение.....	3
<b>1. Система единиц физических величин SI.</b>	
<b>Размерность. Размер.....</b>	<b>4</b>
1.1. Основные положения.....	4
1.2. Вопросы для самопроверки.....	6
1.3. Примеры решения типовых задач.....	7
1.4. Задачи.....	
<b>2. Выражение результатов измерений по различным измерительным шкалам.....</b>	<b>16</b>
2.1 Основные положения.....	16
2.2 Вопросы для самопроверки.....	17
2.3 Примеры решения задач.....	18
2.4 Задачи.....	19
<b>3. Характеристики результатов измерений.....</b>	<b>28</b>
3.1. Основные положения.....	28
3.2. Вопросы для самопроверки.....	36
3.3. Примеры решения задач.....	38
3.4. Задачи.....	44
<b>4. Определение и исключение грубых ошибок и промахов.....</b>	<b>51</b>
4.1. Основные положения.....	51
4.2. Вопросы для самопроверки.....	53
4.3. Примеры решения задач.....	53
4.4. Задачи.....	57
<b>5. Погрешности измерений.....</b>	<b>63</b>
5.1 Основные положения.....	63
5.2 Вопросы для самопроверки.....	65
5.3 Примеры решения задач.....	65
5.4 Задачи.....	67
<b>6. Классы точности средств измерений.....</b>	<b>77</b>
6.1. Основные положения.....	77
6.2. Вопросы для самопроверки.....	79
6.3. Примеры решения задач.....	79
6.4. Задачи.....	82

<b>7.Проверка гипотезы о виде распределения экспериментальных данных.....</b>	88
7.1. Основные положения.....	88
7.2. Вопросы для самопроверки.....	92
7.3. Примеры решения задач.....	93
7.4. Задачи.....	102
<b>8.Виды и методы измерений.....</b>	111
8.1. Основные положения.....	111
8.2. Вопросы для самопроверки.....	117
8.3. Примеры решения задач.....	118
8.4. Задачи.....	133
<b>9.Группы однородных результатов измерений.....</b>	145
9.1. Основные положения.....	145
9.2. Вопросы для самопроверки.....	152
9.3. Примеры решения задач.....	152
9.4. Задачи.....	162
<b>10.Ряды предпочтительных чисел.....</b>	177
10.1. Основные положения.....	177
10.2. Вопросы для самопроверки.....	184
10.3. Примеры решения типовых задач.....	185
10.4. Задачи.....	190
<b>11.Уровень унификации и стандартизации.....</b>	196
11.1. Основные положения.....	196
11.2. Вопросы для самопроверки.....	198
11.3. Примеры решения типовых задач.....	199
11.4. Задачи.....	200
<b>12.Технико-экономическая эффективность стандартизации.....</b>	205
12.1. Основные положения.....	205
12.2. Вопросы для самопроверки.....	207
12.3. Примеры решения типовых задач.....	207
12.4. Задачи.....	208
Приложения.....	212

Учебное издание

Кошлякова И.Г.,  
Ваганов В.А.,  
Атоян Т.В.

**ПРАКТИКУМ ПО МЕТРОЛОГИИ  
И СТАНДАРТИЗАЦИИ**

**ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

Редактирование осуществлено авторами  
Компьютерная обработка И.В. Чурина

---

В печать 2.08.2013.

Объем 14,2 усл.п.л. Офсет. Формат 60x84/16.

Бумага тип №3. Заказ № 784 Тираж 120 экз. Цена свободная

---

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:  
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1.